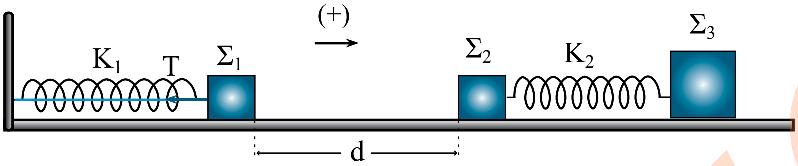
# Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΟΥ ΜΗΝΑ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2022

## ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ (αμελητέων διαστάσεων) έχουν ίσες μάζες $m_1=m_2=1Kg$ και δεν παρουσιάζουν τριβή με το οριζόντιο δάπεδο. Το σώμα $Σ_3$ μάζας $m_3=4Kg$ παρουσιάζει τριβή με το οριζόντιο δάπεδο. Τα ελατήρια είναι ιδανικά και έχουν σταθερές $K_1=100N/m$ και $K_2=400N/m$. Αρχικά το σώμα $Σ_1$ ισορροπεί μέσω ενός αβαρούς μη εκτατού νήματος με το ελατήριο $K_1$ να είναι συσπειρωμένο, ενώ τα σώματα $Σ_2$ και $Σ_3$ ισορροπούν με το ελατήριο $K_2$ στο φυσικό του μήκος. Η τάση του νήματος έχει τιμή $T=8N$ και τα σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ απέχουν μεταξύ τους $d=0{,}12m$. Τη χρονική στιγμή $t_o=0$ κόβουμε το νήμα και το σώμα $Σ_1$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.




**Δ1.** Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης για την ταλάντωση του σώματος $Σ_1$.

*Μονάδες 4*

**Δ2.** Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται με το σώμα $Σ_2$.

*Μονάδες 5*

Μετά την κρούση (η οποία είναι ελαστική και μετωπική) το σώμα $Σ_1$ ακινητοποιείται στιγμιαία, ενώ το $Σ_2$ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με το σώμα $Σ_3$ να παραμένει συνεχώς ακίνητο.

**Δ3.** Θεωρώντας χρονική στιγμή $t_o'=0$ τη στιγμή της κρούσης, να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις των απομακρύνσεων για τις κινήσεις των δυο σωμάτων μετά την κρούση.

*Μονάδες 6*

**Δ4.i.** Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της στατικής τριβής στο σώμα $Σ_3$ και να τη σχεδιάσετε για χρόνο μιας περιόδου.

*Μονάδες 4*

**Δ4.ii.** Να υπολογίσετε τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής ώστε το σώμα $Σ_3$ να παραμένει συνεχώς ακίνητο.

*Μονάδες 6*

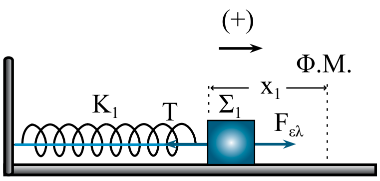
Να θεωρήσετε:
- τις αντιστάσεις του αέρα αμελητέες.
- ότι τα σχήματα δεν είναι υπό κλίμακα.
- τις διαστάσεις των σωμάτων αμελητέες.
- θετική την φορά που φαίνεται στο σχήμα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$.

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

**Δ1.** Από την ισορροπία του σώματος $Σ_1$ παίρνουμε:

$$ΣF = 0 \Rightarrow F_{ελ} - T = 0 \Rightarrow K_1 x_1 = T \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100x_1 = 8 \Rightarrow x_1 = 0{,}08\,m$$




Το σώμα ξεκινάει την ταλάντωσή του από τη θέση x=–A. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

$$A_1=x_1=0{,}08\ m$$

Υπολογίζουμε την αρχική φάση και τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης.

$$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t + \varphi) \xrightarrow{t_o = 0} -A_1 = A_1 \eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\varphi = -1 \Rightarrow \eta\mu\varphi = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \varphi = 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2} \\ \varphi = 2\kappa\pi + \pi - \dfrac{3\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}\,\text{rad}$$

$$K_1 = m_1\omega_1^2 \Rightarrow 100 = 1\omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = 10\,\text{rad/s}$$

Και η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

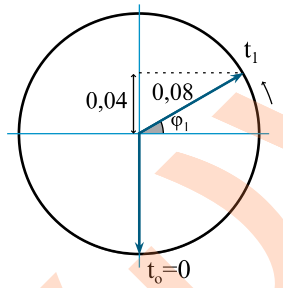
$$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega_1 t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0{,}08\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

**Δ2.** Το σώμα $\Sigma_1$ συγκρούεται με το $\Sigma_2$ όταν βρίσκεται σε απομάκρυνση:

$$x' = 0{,}12 - 0{,}08 = 0{,}04\ \text{m}$$

Και η χρονική στιγμή $t_1$ που γίνεται η κρούση των δυο σωμάτων είναι:




$$\eta\mu\varphi_1 = \frac{0{,}04}{0{,}08} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$

$$\varphi_{o\lambda} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}\,\text{rad}$$

$$\varphi_{o\lambda} = \omega_1 t_1 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = 10t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{30}\,\text{s}$$

**Δ3.** Το σώμα $\Sigma_1$ ξεκινάει να ταλαντώνεται μετά την κρούση από τη νέα ακραία του θέση:

$$A_2 = 0{,}04\ \text{m}$$

Υπολογίζουμε την αρχική φάση της νέας ταλάντωσης.

$$x_1' = A_1' \eta\mu(\omega t' + \varphi') \xrightarrow{t_o' = 0} A_1' = A_1' \eta\mu\varphi' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\varphi' = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi' = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \varphi' = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \varphi' = 2\kappa\pi + \pi - \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \varphi' = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

Και η εξίσωση της νέας ταλάντωσης του σώματος $\Sigma_1$ είναι:

$$x_1' = A_1' \eta\mu(\omega t' + \varphi') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1' = 0{,}04\eta\mu\left(10t' + \frac{\pi}{2}\right)$$

Υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος $\Sigma_1$ τη στιγμή της κρούσης.

$$
\begin{aligned}
&K + U = E \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2 + \frac{1}{2}K_1x'^2 = \frac{1}{2}K_1A_1^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow m_1\upsilon'^2 + m_1\omega^2x'^2 = m_1\omega^2A_1^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \upsilon'^2 + \omega^2x'^2 = \omega^2A_1^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \upsilon'^2 + 10^2\cdot 0{,}04^2 = 10^2\cdot 0{,}08^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \upsilon'^2 = 0{,}64 - 0{,}16 \Rightarrow \upsilon' = 0{,}4\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

Μετά την κρούση τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Επομένως αφού το σώμα $\Sigma_2$ ξεκινάει την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας του, η μέγιστη ταχύτητά του είναι:

$$
\upsilon'_{2,max} = \upsilon' \Rightarrow \upsilon'_{2,max} = 0{,}4\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}
$$

Υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος $\Sigma_2$.

$$
\begin{aligned}
&K_2 = m_2\omega_2^2 \Rightarrow 400 = 1\omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = 20\,\mathrm{rad/s} \\
&\upsilon'_{2,max} = A'_2\omega_2 \Rightarrow 0{,}4\sqrt{3} = A'_2 20 \Rightarrow \\
&\Rightarrow A'_2 = 0{,}02\sqrt{3}\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

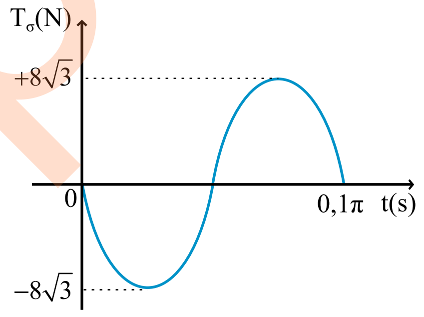
Και η εξίσωση της ταλάντωσης του σώματος $\Sigma_2$ είναι:

$$
x'_2 = A'_2\eta\mu\omega_2 t' \Rightarrow x'_2 = 0{,}02\sqrt{3}\eta\mu 20t'
$$

**Δ4.i.** Από τη ισορροπία του σώματος $\Sigma_3$ παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
&\Sigma F = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{T}_\sigma = 0 \Rightarrow T_\sigma = -K_2x'_2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow T_\sigma = -400\cdot 0{,}02\sqrt{3}\eta\mu 20t' \Rightarrow \\
&\Rightarrow T_\sigma = -8\sqrt{3}\eta\mu 20t'
\end{aligned}
$$

Και το χρονικό διάγραμμα της στατικής τριβής είναι:




**Δ4.ii.** Πρέπει η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής να μην είναι μεγαλύτερη από την τριβή ολίσθησης.

$$
\begin{aligned}
&T_{\sigma,max} \le T_{o\lambda} \Rightarrow T_{\sigma,max} \le \mu m_3 g \Rightarrow \\
&\Rightarrow 8\sqrt{3} \le \mu 4\cdot 10 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \mu \ge 0{,}2\sqrt{3} \Rightarrow \mu_{min} = 0{,}2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$