# 2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

**ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ**

**Ημερομηνία: Πέμπτη 29 Δεκεμβρίου 2016**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

**Μονάδες 10**

**Α2.** Να δώσετε τον ορισμό της περιοδικής συνάρτησης

**Μονάδες 5**

**Α3.** Να συμπληρώσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

**1)** Υπάρχει γωνία φ τέτοια ώστε $\eta\mu\varphi+\sigma\upsilon\nu\varphi=2$. **Σ Λ**

**2)** Η εξίσωση $2016\cdot\eta\mu x=2017$ είναι αδύνατη. **Σ**

**Λ**

**3)** Ισχύει ότι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sigma\upsilon\nu x$. **Σ Λ**

**4)** Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,\pi]$. **Σ**

**Λ**

**5)** Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 3x$ έχει μέγιστη τιμή 2 και περίοδο $T=3$. **Σ Λ**

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Να απλοποιηθεί η παράσταση: $$A=\frac{\varepsilon\varphi(\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu\,(\pi+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(-\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

**Μονάδες 10**

**Β2.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ **β)** $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$ **γ)** $2\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$

**Μονάδες 15**

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και το $\eta\mu x$ είναι λύση της εξίσωσης: $5\omega^2 + 2\omega - 3 = 0$,

**i)** να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{3}{5}$

**ii)** να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x$.

**Μονάδες 10**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι:

**i)** $(\eta\mu x + \varepsilon\varphi x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x + \sigma\varphi x) = (1 + \eta\mu x)\cdot(1 + \sigma\upsilon\nu x)$

**ii)** $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ όπου $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

**Μονάδες 15**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right), x \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu(3x)$

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια η περιττή.

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f$; Ποια είναι η περίοδος της $f$;

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f$ σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

**μονάδες 5**

**Δ5.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 8. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**μονάδες 5**

**ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Ημερομηνία: Πέμπτη 29 Δεκεμβρίου 2016**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία **Α2.** Θεωρία **1** Λάθος **2** Σωστό **3** Λάθος **4** Σωστό **5** Λάθος

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $$\mathrm{A}=\frac{\varepsilon\varphi(\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu(\pi+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(-\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{-\varepsilon\varphi\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(-\eta\mu\theta)}{-\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\varepsilon\varphi\theta}=-1$$

**Β2. α)** $$\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \acute{\eta}\\ x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases},\quad\kappa\in Z$$

**β)** $$\varepsilon\varphi x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z$$

**γ)** $$2\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\\ \acute{\eta}\\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\end{cases},\quad\kappa\in Z$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1. i)** Έχουμε: $5\omega^2+2\omega-3=0\Leftrightarrow\omega=\frac{3}{5}$ $\acute{\eta}$ $\omega=-1$.

Επομένως: $\eta\mu x=\frac{3}{5}$ αφού $\frac{\pi}{2}<x<\pi$.

**ii)** $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x=1-\frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{16}{25}$

Επομένως $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{4}{5}$ αφού $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ .

$$\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4} \qquad \sigma\varphi x=\frac{1}{\varepsilon\varphi x}=-\frac{4}{3}$$

**Γ2. i)**

$$\begin{aligned}
&(\eta\mu x+\varepsilon\varphi x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\varphi x)=\\
&=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=\\
&=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x+1=\\
&=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+1=\\
&=\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x+1)+\eta\mu x+1=\\
&=(1+\eta\mu x)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)
\end{aligned}$$

**ii)** Για κάθε $x\neq\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$, είναι:

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\\
&=\frac{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\eta\mu x+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}=\\
&=\frac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}=\frac{2}{\eta\mu x}
\end{aligned}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Έχουμε, $\eta\mu(\pi-3x)=\eta\mu(3x)$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\eta\mu(3x)$ οπότε :

$$f(x)=\eta\mu(\pi-3x)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\eta\mu(3x)+\eta\mu(3x)=2\eta\mu(3x)$$

**Δ2.** $A=R$. Για κάθε $x\in A$ ισχύει $-x\in A$ και $f(-x)=\eta\mu(-3x)=-\eta\mu(3x)=-f(x)$.

Άρα η $f$ είναι περιττή

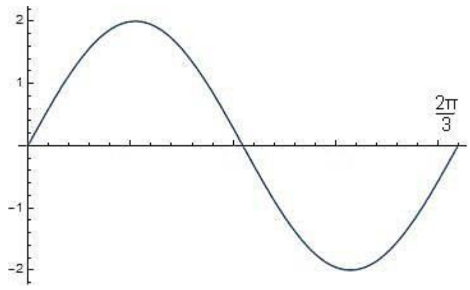
**Δ3.** Η συνάρτηση $f$ είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ με $\omega=3$ και $\rho=2$, που είναι περιοδική με περίοδο $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(3x)$ έχει μέγιστο το 2 και ελάχιστο το -2. Η περίοδος της $f$ είναι $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$.

**Δ4.** Συμπληρώνουμε έναν πίνακα τιμών για την $f$ σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου:

| x | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2\eta\mu(3x)$ | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 |

Σχεδιάζουμε τώρα την γραφική παράσταση της $f$ :




**Δ5.** $f(x) = 8 \Leftrightarrow 2\eta\mu(3x) = 8 \Leftrightarrow \eta\mu(3x) = 4$ αδύνατο αφού $-1 \leq \eta\mu(3x) \leq 1$