2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ημερομηνία: Τρίτη 27 Δεκεμβρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου, να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Μονάδες 10

Α2. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

Α3. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.*

α. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2\cdot\vec{\beta}$.

β. Η ευθεία $y=2017$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 0.

γ. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x’x τότε $0\le\omega<2\pi$.

δ. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α(x_0, y_0) έχουν εξίσωση της μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.

ε. Η εξίσωση y=|x| παριστάνει τις διχοτόμους των αξόνων.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{a}=(|a|-2,|a|-1)$ το οποίο δεν είναι παράλληλο στον άξονα x’x καθώς και τα διανύσματα $\vec{\beta}=(4,3)$ και $\vec{\gamma}=(7,-1)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $|a|=5$.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)$.

Μονάδες 6

Β3. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{v}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις: $(\vec{v}-\vec{\beta}) \parallel \vec{\gamma}$ και $(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \perp \vec{v}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

Μονάδες 6

Β4. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία Α (1, 4) και Β (- 1, - 6).

Γ1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ

Μονάδες 5

Γ3. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Μονάδες 7

Γ4. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου Γ(5, -2), ως προς την ευθεία ΑΒ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία Α (-6, 5) και Β (3, 2) και Γ(λ-1, 2-3λ).

Δ1. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ τα σημεία Α, Β και Γ είναι κορυφές τριγώνου.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.

Μονάδες 5

Δ3. Για λ=2 να βρείτε:

i. Την εξίσωση του ύψους ΒΔ.

ii. Την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ.

iii. Την εξίσωση της πλευράς ΑΒ και τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

Μονάδες 15

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Τρίτη 27 Δεκεμβρίου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το $\vec{a}$ δεν είναι παράλληλο στον x’x. Άρα $|a|-1\neq 0 \Leftrightarrow |a|\neq 1$.

Είναι $|\vec{a}|=\sqrt{(|\vec{\alpha}|-2)^2+(|\vec{\alpha}|-1)^2} \Leftrightarrow |\vec{a}|^2=(|\vec{\alpha}|-2)^2+(|\vec{\alpha}|-1)^2$

$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2=|\vec{\alpha}|^2-4|\vec{\alpha}|+4+|\vec{\alpha}|^2-2|\vec{\alpha}|+1 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2=2|\vec{\alpha}|^2-6|\vec{\alpha}|+5$

$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2-6|\vec{\alpha}|+5=0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=5$ ή $|\vec{\alpha}|=1$. Όμως $|\vec{\alpha}|\neq 1$, οπότε $|\vec{\alpha}|=5$.

Β2. Είναι $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=4\cdot 7+3\cdot(-1)=28-3=25$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$
και $|\vec{\gamma}|=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Επομένως $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|}=\dfrac{25}{5\cdot 5\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Β3. Επειδή $(\vec{v}-\vec{\beta})\parallel\vec{\gamma}$ θα είναι $\vec{v}-\vec{\beta}=\lambda\vec{\gamma}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$. Επομένως $\vec{v}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\gamma}$ και θα είναι $\vec{v}=(4+7\lambda,3-\lambda)$.

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ έχει συντεταγμένες $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(3-4,4-3)=(-1,1)$.

Επειδή $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\perp\vec{v}$ θα είναι :

$(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow -1\cdot(4+7\lambda)+1\cdot(3-\lambda)=0 \Leftrightarrow -4-7\lambda+3-\lambda=0 \Leftrightarrow -8\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{8}$.

Άρα το διάνυσμα $\vec{v}$ θα έχει συντεταγμένες:

$\vec{v}=\left(4+7\cdot(-\frac{1}{8}),3-(-\frac{1}{8})\right)=\left(4-\frac{7}{8},3+\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{25}{8},\frac{25}{8}\right)$

B4. Έστω $\vec{u}$ και $\vec{w}$ οι ζητούμενες συνιστώσες με $\vec{u}\parallel\vec{a}$. Θα είναι $\vec{u}=\mu\vec{\alpha}=(3\mu,4\mu)$.

Αν $\vec{w}=(x,y)$, θα είναι: $\vec{w}\perp\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{w}\cdot\vec{\alpha}=0 \Leftrightarrow 3x+4y=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}y$. Άρα $\vec{w}\left(-\frac{4}{3}y,y\right)$.

Όμως $\vec{u}+\vec{w}=\vec{\beta}$ οπότε $\left(3\mu-\frac{4}{3}y,4\mu+y\right)=(4,3)$. Επομένως: $\begin{cases} 3\mu-\frac{4}{3}y=4 \\ 4\mu+y=3 \end{cases}$

Από τη λύση του παραπάνω συστήματος βρίσκουμε $\mu=\frac{24}{25}$ και $y=-\frac{21}{25}$.

Άρα $\vec{u}=\left(\frac{72}{25},\frac{96}{25}\right)$ και $\vec{w}=\left(\frac{32}{25},-\frac{21}{25}\right)$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Αν Μ(γ, δ) το μέσο του ΑΒ τότε: $\gamma=\frac{-1+1}{2}=0$ και $\delta=\frac{-6+4}{2}=-1$. Άρα Μ(0, -1).

Γ2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_1=\frac{-6-4}{-1-1}=5$.

Γ3. Έστω (ε) η μεσοκάθετος της ευθείας ΑΒ με συντελεστή διεύθυνσης λ_2. Θα ισχύει $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$ οπότε $\lambda_2=-\frac{1}{5}$. Η ευθεία (ε) θα έχει εξίσωση: $y+1=-\frac{1}{5}(x-0) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{5}x-1$.

Γ4. Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του Γ επαληθεύουν την εξίσωση της μεσοκαθέτου. Άρα το σημείο Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Αν Γ'(κ, λ) το συμμετρικό του Γ ως προς την ευθεία ΑΒ, τότε το Μ θα είναι το μέσο του ΓΓ'. Επομένως:

$0=\frac{5+\gamma}{2} \Leftrightarrow \gamma=-5$ και $-1=\frac{-2+\delta}{2} \Leftrightarrow \delta=0$. Άρα $\Gamma'(-5,0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\overrightarrow{AB}=(3+6,2-5)=(9,-3)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=(\lambda-4,-3\lambda)$. Τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά αν

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ \lambda-4 & -3\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -27\lambda+3\lambda-12=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}.$$

Άρα για να είναι τα σημεία Α, Β και Γ κορυφές τριγώνου πρέπει $\lambda \neq -\frac{1}{2}$.

Δ2. Για να είναι το τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Β πρέπει $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0$ $\Leftrightarrow 9\cdot(\lambda-4)-3\cdot(-3\lambda)=0 \Leftrightarrow 9\lambda-36+9\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=2$.

Δ3. i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι $\lambda_1=\frac{5+4}{-6-1}=-\frac{9}{7}$. Επομένως η ευθεία ΒΔ που είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ θα έχει κλίση $\lambda_2=\frac{7}{9}$ και εξίσωση

$$y-2=\frac{7}{9}(x-3) \Leftrightarrow y=\frac{7}{9}x-\frac{1}{3}.$$

ιι. Το Μ μέσο του ΑΒ. Άρα $M\left(\frac{3-6}{2},\frac{2+5}{2}\right)$ δηλαδή $M\left(\frac{-3}{2},\frac{7}{2}\right)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΜΓ θα είναι $\lambda_3=\frac{\frac{7}{2}+4}{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{15}{5}=-3$. Η ευθεία ΓΜ θα έχει εξίσωση: $y+4=-3(x-1) \Leftrightarrow y=-3x-1$.

ιιι. Η ευθεία ΑΒ θα έχει εξίσωση:

$$y-2=\frac{5-2}{-6-3}(x-3) \Leftrightarrow y-2=-\frac{1}{3}(x-3) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+3.$$