3η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: Τρίτη 18 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon = \mathrm{P}(\rho)$.

(Μονάδες 9)

Α2. Ποια ονομάζουμε σταθερά πολυώνυμα και ποιο μηδενικό πολυώνυμο;

(Μονάδες 3)

Α3. Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x)=\ln x$.

(Μονάδες 3)

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

ii. Κάθε πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζες όλους τους διαιρέτες του σταθερού όρου.

iii. Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>0$ και $\alpha \neq 1$ έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

iv. Για κάθε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει $\ln\frac{\theta_1}{\theta_2} = \ln\theta_1 - \ln\theta_2$.

v. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 5x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$.

Β1. Να υπολογιστούν τα α και β, αν το P(x) έχει παράγοντες τα $x-1$ και $x-2$.

(Μονάδες 7)

Για $\alpha = 5$ και $\beta = 5$:

Β2. Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το $\delta(x) = (x-2)(x-1)$.

(Μονάδες 8)

Β3. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x), βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$

(Μονάδες 9)

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x > 3\ln 2$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x)=(\lambda^3-\lambda-5)^x$.

Δ1. Να βρείτε τις δυνατές τιμές της παραμέτρου λ.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να λυθεί η ανίσωση $f(2^x+12)<f(2^{x-1}+2^{x+1})$.

(Μονάδες 7)

Δ3. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η C_f διέρχεται από το σημείο Μ(1, 19).

(Μονάδες 6)

Δ4. Αν λ=3 να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(-x)=2$.

(Μονάδες 6)

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ**

Ημερομηνία: Τρίτη 18 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία **Α2.** Θεωρία **Α3.** Θεωρία

Α4. 1 Λάθος **2** Λάθος **3** Σωστό **4** Σωστό **5** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow 1-5+\alpha+\beta-6=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=10$ (1) και

$P(2)=0 \Leftrightarrow 16-40+4\alpha+2\beta-6=0 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=30 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=15$ (2)

Από το σύστημα των (1) και (2) προκύπτει ότι $\alpha=5$ και $\beta=5$

Β2. Είναι $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$

1	-5	5	5	-6	2
	2	-6	-2	6	
1	-3	-1	3	0	

Άρα $P(x)=(x-2)(x^3-3x^2-x+3)$

1	-3	-1	3	1
	1	-2	-3	
1	-2	-3	0	

Άρα $P(x)=(x-2)(x-1)(x^2-2x-3)$

Β3. $P(x)<0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x^2-2x-3)<0$

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-x-2		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Το $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ για $x\in(-1,1)\cup(2,3)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να ορίζεται η f αρκεί να ισχύει:

$$e^x-2>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow \ln e^x>\ln 2 \Leftrightarrow x\ln e>\ln 2 \Leftrightarrow x>\ln 2$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$A=(\ln 2,+\infty)$$

Γ2. Για $x\in(\ln 2,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x)+x=3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x-2)+x=3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x-2)+\ln e^x=\ln 2^3 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left((e^x-2)e^x\right)=\ln 8 \Leftrightarrow (e^x-2)e^x=8 \Leftrightarrow$$

$$(e^x)^2-2e^x-8=0 \quad (1)$$

Θέτουμε $e^x=\omega>0$ οπότε η (1) γίνεται:

$$\omega^2-2\omega-8=0 \Leftrightarrow$$
$$\omega=-2 \text{ ή } \omega=4$$

Οπότε

$e^x=-2$ αδύνατη

ή

$e^x=4 \Leftrightarrow \ln e^x=\ln 4 \Leftrightarrow x\ln e=\ln 4 \Leftrightarrow \boxed{x=\ln 4}$ δεκτή, αφού

$4>2 \Leftrightarrow \ln 4>\ln 2$

Γ3. Για $x\in(\ln 2,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x)+x>3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x-2)+x>3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x-2)+\ln e^x>\ln 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left((e^x-2)e^x\right)>\ln 8 \Leftrightarrow (e^x-2)e^x>8 \Leftrightarrow$$

$$(e^x)^2 - 2e^x - 8 > 0 \ \ (2)$$

Θέτουμε $e^x = \omega > 0$ οπότε η (2) γίνεται:

$$\omega^2 - 2\omega - 8 > 0$$

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ 4 $\quad$ $+\infty$
$\omega^2 - 2\omega - 8$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

Άρα $\omega < -2$ ή $\omega > 4$

Οπότε

$e^x < -2$ αδύνατη

ή

$e^x > 4 \Leftrightarrow \ln e^x > \ln 4 \Leftrightarrow x \ln e > \ln 4 \Leftrightarrow x > \ln 4$

Άρα η ανίσωση $f(x) + x > 3\ln 2$ έχει λύσεις όλα τα $\boxed{x \in (\ln 4, +\infty)}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή η f είναι εκθετική και γνησίως αύξουσα πρέπει

$\lambda^3 - \lambda - 5 > 1 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda - 6 > 0 \ \ (1)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -6 & 2 \\ & 2 & 4 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

Οπότε (1) $\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 3) > 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$ αφού $\lambda^2 + 2\lambda + 3 > 0$ για κάθε $\lambda \in R$

Δ2. $f(2^x + 12) < f(2^{x-1} + 2^{x+1}) \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} 2^x + 12 < 2^{x-1} + 2^{x+1} \Leftrightarrow 2^x + 12 < \dfrac{2^x}{2} + 2 \cdot 2^x$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + 24 < 2^x + 4 \cdot 2^x \Leftrightarrow -3 \cdot 2^x < -24 \Leftrightarrow 2^x > 8 \Leftrightarrow 2^x > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$$

Δ3. Πρέπει $f(1) = 19 \Leftrightarrow (\lambda^3 - \lambda - 5)^1 = 19 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda - 5 = 19 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda - 24 = 0 \ \ (1)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -24 & 3 \\ & 3 & 9 & 24 & \\ \hline 1 & 3 & 8 & \boxed{0} & \end{array}$$

Οπότε (1) $\Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda+8)=0 \Leftrightarrow \lambda-3=0 \Leftrightarrow \lambda=3$ αφού $\lambda^2+3\lambda+8>0$ για κάθε $\lambda \in R$

Δ4. Για $\lambda=3$ είναι $f(x)=(27-3-5)^x=19^x$ οπότε

$$f(x)+f(-x)=2 \Leftrightarrow 19^x+19^{-x}=2 \Leftrightarrow 19^x+\frac{1}{19^x}=2 \Leftrightarrow$$

$$(19^x)^2+1=2\cdot 19^x \Leftrightarrow$$

$$(19^x)^2-2\cdot 19^x+1=0$$

Θέτουμε $19^x=\omega$, $\omega>0$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$$\omega^2-2\omega+1=0 \Leftrightarrow (\omega-1)^2=0 \Leftrightarrow \omega-1=0 \Leftrightarrow \omega=1$$

Άρα $19^x=1 \Leftrightarrow 19^x=19^0 \Leftrightarrow x=0$