3η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ημερομηνία: Πέμπτη 20 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

(Μονάδες 8)

Α2. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

(Μονάδες 3)

Α3. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

(Μονάδες 4)

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0, και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

ii. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 που έχει ασύμπτωτη.

iii. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

iv. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο της με τετμημένη x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

v. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, γ ∈Δ, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx .$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{1-x}{x}$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 6)

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Μονάδες 6)

Β3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 6)

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τους άξονες $x'x$, $y'y$, και την ευθεία $x = 1$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(x) = x^4 + 2x^3 + \alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in R$, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -10$.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

Γ3. Να βρείτε για ποιες τιμές του β η εξίσωση $f(x) = \beta^2 - 7$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

Γ4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu x-\sqrt{f(x)+1}}{x\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{f(x)-1}}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:R\to R$ μία συνάρτηση με $f(0)=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(x)=-f'(x)\cdot\left(f(x)+x\right),\text{ για κάθε } x\in R.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\quad x\in R$ και στη συνέχεια ότι

$$f(x)=-f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1},\quad x\in R.$$

(Μονάδες 6)

Δ2. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να δείξετε ότι $f(2x)-f(x)<x\,f'(2x)$, για κάθε $x>0$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}, & x>0\\ -1, & x=0\end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

(Μονάδες 7)

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 20 Απριλίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη

Α2. Ορισμός **Α3.** Ορισμός

Α4. **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = (0,1)$, $f\,'(x) = \dfrac{x}{1-x}\cdot\dfrac{-x-(1-x)}{x^2} = \dfrac{-1}{x(1-x)} = \dfrac{1}{x(x-1)} < 0$, για κάθε $x \in (0,1)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.

Β2. Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και γνησίως φθίνουσα άρα $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)$

Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\dfrac{1-x}{x} = \lim\limits_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln\dfrac{1-x}{x} = \lim\limits_{u\to 0} \ln u = -\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = R$.

Β3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα "$1-1$" οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \ln\dfrac{1-x}{x}=y \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}=e^{y} \Leftrightarrow$

$1-x=xe^{y} \Leftrightarrow x(e^{y}+1)=1 \;\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e^{y}+1},\;\; y\in f(A)=R$.

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{e^{x}+1},\; x\in R$.

Β4. $E=\displaystyle\int_0^1 \left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_0^1\frac{1}{e^{x}+1}dx=\int_0^1\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=$

$-\displaystyle\int_0^1\frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}}dx=-[\ln(1+e^{-x})]_0^1= \;-\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)+\ln 2\; =\ln\frac{2e}{e+1}$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x^3+6x^2+a$. Είναι $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in R$ οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Άρα από το θεώρημα του Fermat θα ισχύει:

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow 4\cdot 1^3+6\cdot 1^2+a=0 \Leftrightarrow 10+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=-10.$$

Γ2. Για $a=-10$ είναι: $f'(x)=4x^3+6x^2-10$ με $x\in\mathbb{R}$. Με το σχήμα Horner βρίσκουμε ότι $f'(x)=(x-1)(4x^2+10x+10)$. Ισχύει ότι $4x^2+10x+10>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επειδή το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=100-160=-60<0$. Οι ρίζες , το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f ΄(x)		$-$	0	$+$	
f (x)		$\searrow$		$\nearrow$	

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1)=\beta-7$.

Γ3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_1=(-\infty,1]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+2x^3-10x+\beta)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$ και $f(1)=\beta-7$.

Άρα το σύνολο τιμών στο Δ_1 θα είναι $f(\Delta_1)=[\beta-7,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_2=(1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\beta-7$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4+2x^3-10x+\beta)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών στο Δ_2 θα είναι $f(\Delta_2)=(\beta-7,+\infty)$.

Για να έχει η εξίσωση $f(x)=\beta^2-7$ δύο μόνο πραγματικές ρίζες θα πρέπει το $\beta^2-7\in f(\Delta_1)$ και $\beta^2-7\in f(\Delta_2)$. Έτσι σε συνδυασμό με τη μονοτονία της f η εξίσωση $f(x)=\beta^2-7$ θα έχει μία μόνο ρίζα στο Δ_1 και μία μόνο ρίζα στο Δ_2.

Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει: $\beta^2-7>\beta-7\Leftrightarrow\beta^2-\beta>0\Leftrightarrow\beta(\beta-1)>0\Leftrightarrow\beta<0$ ή $\beta>1$

δηλαδή θα πρέπει $\beta\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

Γ4. Για $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\eta\mu x-\sqrt{x^4+2x^3-10x+\beta+1}}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{x^4+2x^3-10x+\beta-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\eta\mu x-x^2\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{10}{x^3}+\frac{\beta+1}{x^4}}}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x-x^2\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{10}{x^3}+\frac{\beta-1}{x^4}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left[\frac{\eta\mu x}{x}-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{10}{x^3}+\frac{\beta+1}{x^4}}\right]}{x^2\left[\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{10}{x^3}+\frac{\beta-1}{x^4}}\right]}=\frac{0-\sqrt{1+0-0+0}}{0-\sqrt{1+0-0+0}}=\frac{-1}{-1}=1$$

Διότι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=|\eta\mu x|\cdot\left|\frac{1}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}$ για $x>0$. Επομένως $-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

Όμοια προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Για $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x)=-f'(x)\cdot f(x)-xf'(x)\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=-f'(x)\cdot f(x)$

$\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'=\left(-\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$ οπότε $xf(x)=-\dfrac{f^2(x)}{2}+c$.

Για $x=0$ από την παραπάνω ισότητα προκύπτει:

$$0f(0)=-\frac{f^2(0)}{2}+c\Leftrightarrow 0=-\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$$

Άρα $xf(x)=-\dfrac{f^2(x)}{2}+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2xf(x)=-f^2(x)+1\Leftrightarrow f^2(x)+2xf(x)=1\Leftrightarrow$

$$f^2(x)+2xf(x)+x^2=x^2+1\Leftrightarrow\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1 \text{ για } x\in\mathbb{R}.$$

Θεωρούμε την $\varphi(x)=f(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$ οπότε $\varphi^2(x)=x^2+1\Leftrightarrow|\varphi(x)|=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Για τη συνεχή συνάρτηση φ(x) ισχύει $\varphi(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επειδή $\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε η φ(x) διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $\varphi(0)=f(0)+0=1>0$ θα είναι $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως $\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+1}$.

Άρα $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ $x\in\mathbb{R}$.

Είναι: $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

Άρα $f(x) = -f'(x)\sqrt{x^2+1},\ \ x \in \mathbb{R}\ \ (1)$

Δ2. Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και $g(x) \le 0$ για $x \in [0,1]$.

Το ζητούμενο εμβαδό θα είναι:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 -g(x)dx = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x) = -f'(x)\sqrt{x^2+1} \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Άρα $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 -\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left[-\ln|f(x)|\right]_0^1 = -\ln f(1) + \ln f(0) =$

$= -\ln(\sqrt{2}-1) + \ln 1 = -\ln(\sqrt{2}-1)$

και $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1.$

Οπότε

$\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 = -\ln(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2} + 1 = \ln(\sqrt{2}-1)^{-1} - \sqrt{2} + 1$

$= \ln\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2} + 1 = = \ln(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2} + 1.$

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2} = \frac{\dfrac{2(x^2+1)-2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-2x^2}{2\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)} > 0$$

οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Δ4. ► Για $x > 0$ η f είναι συνεχής στο $[x,2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,2x)$.

Επομένως από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x,2x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(2x)-f(x)}{2x-x} = \frac{f(2x)-f(x)}{x}.$$

Η f είναι κυρτή επομένως η f' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $0<x<\xi<2x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(2x) \Leftrightarrow \dfrac{f(2x)-f(x)}{x}<f'(2x)$

$$\Leftrightarrow f(2x)-f(x)<x\cdot f'(2x) \text{ για κάθε } x>0.$$

► Θα δείξουμε πρώτα ότι η h είναι συνεχής στο 0.

$$\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(2x)-f(0)-f(x)+f(0)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[2\frac{f(2x)-f(0)}{2x}-\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]=\lim_{x\to0^+}\left(2\frac{f(2x)-f(0)}{2x}\right)-\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=$$

$$=2f'(0)-f'(0)=f'(0)=-1.$$

Αφού $\lim_{x\to0^+}\left(2\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x}\right)\overset{u=2x}{=}2\lim_{u\to0^+}\left(\dfrac{f(u)-f(0)}{u}\right)=2f'(0)$.

Επιπλέον $h(0)=-1$. Άρα η h είναι συνεχής στο $x=0$.

Επίσης η h είναι συνεχής για $x>0$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

$$h'(x)=\frac{\left(2f'(2x)-f'(x)\right)\cdot x-\left(f(2x)-f(x)\right)}{x^2}=\frac{2xf'(2x)-xf'(x)-f(2x)+f(x)}{x^2}=$$

$$=\frac{xf'(2x)+xf'(2x)-xf'(x)-f(2x)+f(x)}{x^2}=\frac{x\left(f'(2x)-f'(x)\right)+\left(xf'(2x)-f(2x)+f(x)\right)}{x^2}>0$$

για κάθε $x>0$, αφού για $x>0$ είναι:

- $2x>x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(2x)>f'(x)\Leftrightarrow f'(2x)-f'(x)>0$
- $f(2x)-f(x)<x\cdot f'(2x)\Leftrightarrow xf'(2x)-f(2x)+f(x)>0$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.