Ωρίωνας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ	ΑΠΟ 21/10/2017 ΕΩΣ 11/11/2017
	1η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Παρασκευή 27 Οκτωβρίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω ΑΒ ένα ευθύγραμμο τμήμα και Ο ένα σημείο αναφοράς. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του ΑΒ αν και μόνο αν ισχύει $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

Μονάδες 10

Α2. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Μονάδες 2

Α3. Τι λέμε συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$ με $x \neq 0$;

Μονάδες 3

Α4. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.*

α. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

β. Αν $\vec{\alpha} + 5\vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

γ. Αν (ΑΒ)=2(ΒΓ) τότε $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$.

δ. Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε $\vec{\alpha} // x'x \Leftrightarrow y = 0$.

ε. Ισχύει ότι: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Ο(0, 0), Α(2, 4) και Β(6, -2). Αν Μ μέσο του ΑΒ και ισχύει η σχέση $2\overrightarrow{O\Gamma} = 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AB}$.

Β1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{OM}$.

Μονάδες 6

Β2. Αν Γ(12, 3), να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Γ και Μ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 6

Β3. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = (\lambda^2 - 6\lambda - 12, \lambda^2 - \lambda - 12)$ να είναι ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$

Μονάδες 6

Β4. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι κορυφές τριγώνου και να βρεθεί το μήκος της διαμέσου ΓΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα μεταβλητό σημείο Μ.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{M\Gamma} - 3\overrightarrow{M\Delta}$ είναι σταθερό.

Μονάδες 8

Γ2. Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{\Delta E} + \overrightarrow{\Delta Z}$ είναι παράλληλο στο $\overrightarrow{\Delta B}$.

Μονάδες 8

Γ3. Αν Ρ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε ΡΓ=2ΡΒ, να αποδείξετε ότι:
$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta} - 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, -1)$ και $\vec{\beta} = (1, 3x - 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού x:

i. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο στον άξονα y'y.

ii. Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι παράλληλο στον άξονα x'x.

Μονάδες 5

Δ3. Για $x = -2$ να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = -11\vec{i} + 20\vec{j}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 7

Δ4. Για $x = 3$ να βρείτε ένα διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο ίσο με $\sqrt{40}$.

Μονάδες 8

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Παρασκευή 27 Οκτωβρίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω Γ(x, y). Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{\text{ΟΓ}}$ θα έχει συντεταγμένες: $\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=(x-0,y-0)=(x,y)$
Επίσης $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}=(2-0,4-0)=(2,4)$ και $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}=(6-2,-2-4)=(4,-6)$.

$2\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=6\overrightarrow{\text{ΟΑ}}+3\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\Leftrightarrow 2(x,y)=6(2,4)+3(4,-6)\Leftrightarrow(2x,2y)=(12,24)+(12,-18)$
$\Leftrightarrow(2x,2y)=(24,6)\Leftrightarrow 2x=24 \;\; \textit{και} \;\; 2y=6\Leftrightarrow x=12 \;\; \textit{και} \;\; y=3$. Άρα $\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=(12,3)$.

Το σημείο $M(x_{1,}\, y_1)$ είναι το μέσο του ΑΒ οπότε $x_1=\dfrac{2+6}{2}=4$ και $y_1=\dfrac{4-2}{2}=1$. Οι συντεταγμένες του Μ(4, 1) θα είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος θέσης του Μ, δηλαδή $\overrightarrow{\text{ΟΜ}}=(4,1)$.

Β2. Είναι $\det(\overrightarrow{O\Gamma},\overrightarrow{\text{ΟΜ}})=\begin{vmatrix}12 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=12\cdot1-3\cdot4=12-12=0$. Άρα $\overrightarrow{O\Gamma}//\overrightarrow{\text{ΟΜ}}$ οπότε τα σημεία Ο, Γ και Μ είναι συνευθειακά.

Β3. Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ είναι ίσα όταν:

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{u} \Leftrightarrow (4,-6)=(\lambda^2-6\lambda-12,\lambda^2-\lambda-12) \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda-12=4 \; \textit{και} \; \lambda^2-\lambda-12=-6$

$\Leftrightarrow \lambda=8 \; \acute{\eta} \; \lambda=-2 \; \textit{και} \; \lambda=3 \; \acute{\eta} \; \lambda=-2$.

Επομένως για $\lambda=-2$ είναι $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Β4. Είναι $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=(12-6,3+2)=(6,5)$ οπότε:

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}})=\begin{vmatrix}4 & -6\\ 6 & 5\end{vmatrix}=20-(-36)=20+36=56\neq 0$. Επομένως τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ είναι μη συγγραμμικά οπότε τα σημεία Α, Β και Γ είναι μη συνευθειακά. Άρα σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ. Η διάμεσος ΓΜ θα έχει μήκος:

$\left|\overrightarrow{\Gamma\mathrm{M}}\right|=\sqrt{(4-12)^2+(1-3)^2}=\sqrt{(-8)^2+(-2)^2}=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\vec{\alpha}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+4\overrightarrow{\mathrm{MB}}-2\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}-3\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+3\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}-3\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}}=$

$=(\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}})+(\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}})+3(\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}})=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}+3\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}$.

Γ2. $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta Z}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{\Delta A}}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{\Delta A}}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}}}{2}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{\Delta A}}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}})+2\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}}{2}=$

$=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}+2\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}}{2}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}$. Επομένως $\vec{u}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}$ με $\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}\neq\vec{0}$. Άρα $\vec{u}\,//\,\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}$.

Γ3. $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}-2\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=$

$=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\overset{2\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma P}}}{=}\overrightarrow{\mathrm{\Gamma P}}+\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\overset{\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{=}\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{0}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\det(\vec{a},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}x & -1\\ 1 & 3x-2\end{vmatrix}=x\cdot(3x-2)-(-1)=3x^2-2x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, γιατί το τριώνυμο $3x^2-2x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot 3=4-12=-8<0$. Επειδή λοιπόν $\det(\vec{a},\vec{\beta})\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

Δ2. i. $\vec{a}//y'y \Leftrightarrow x=0$

ii. $\vec{\beta}//x'x \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

Δ3. Για $x=-2$ είναι $\vec{\alpha}=(-2,-1)$ και $\vec{\beta}=(1,-8)$.

Για να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αρκεί να βρούμε πραγματικούς αριθμούς κ και λ ώστε $\vec{\gamma}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, οπότε:

$\vec{\gamma}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow (-11,20)=\kappa(-2,-1)+\lambda(1,-8) \Leftrightarrow (-11,20)=(-2\kappa,-\kappa)+(\lambda,-8\lambda)$

$\Leftrightarrow (-11,20)=(-2\kappa+\lambda,-\kappa-8\lambda) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}-2\kappa+\lambda=-11\\ -\kappa-8\lambda=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\kappa-11\\ -\kappa-8(2\kappa-11)=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\kappa-11\\ -\kappa-16\kappa+88=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\kappa-11\\ -17\kappa=-68\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\cdot 4-11\\ \kappa=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-3\\ \kappa=4\end{cases}$$

Επομένως είναι $\vec{\gamma}=4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

Δ4. Για $x=3$ είναι $\vec{\alpha}=(3,-1)$. Έστω $\vec{v}$ το ζητούμενο διάνυσμα. Επειδή $\vec{v}\uparrow\downarrow\vec{\alpha}$ θα ισχύει $\vec{v}=\mu\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{v}=(3\mu,-\mu)$ με μ<0.

Είναι $|\vec{v}|=\sqrt{40} \Leftrightarrow \sqrt{(3\mu)^2+(-\mu)^2}=\sqrt{40} \Leftrightarrow \sqrt{9\mu^2+\mu^2}=\sqrt{40} \Leftrightarrow \sqrt{10\mu^2}=2\sqrt{10} \Leftrightarrow$

$\sqrt{10}\cdot|\mu|=2\sqrt{10} |\Leftrightarrow| \mu|=2 \overset{\mu<0}{\Leftrightarrow} \mu=-2$.

Επομένως είναι $|\vec{v}|=(-6,2)$.