Ωρίωνας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ	ΑΠΟ 21/10/2017 ΕΩΣ 11/10/2017
	1η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Νοεμβρίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Κάθε συνάρτηση 1 – 1 είναι γνησίως μονότονη »
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για μια συνάρτηση $f: A \to R$ ισχύει: $f(x_1) = f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in A$ τότε $x_1 = x_2$.

β) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{συν}x - 1}{x} = 0$

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

δ) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.

ε) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: R \to R$ και $g: R \to R$ αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = -\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 7x - 5$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1−1".

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

Μονάδες 5

Β3. Αν είναι $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-3}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha^2 + 3\alpha, & x = 1 \end{cases}$, να βρείτε το $\alpha \in R^*$, ώστε η $g(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

Β4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)\,\eta\mu x}{x^4}$.

Μονάδες 6

Β5. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε $f(\lambda^3 - 5\lambda) = f(2\lambda - 6)$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^x) - \ln(1 + e^x)$, $x \in (-\infty, 0)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f.

Μονάδες 6

Γ3. Αν $g(x) = f(x) - x, \quad x < 0$, να βρείτε τη μονοτονία της $g(x)$ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $f(x) - f(-1) < x + 1$.

Μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε το όρια:

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(-1)x^3 + x^2 + 6}{f(-3)x^2 - x - 2}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{3x^2 + 30x + 95} - \dfrac{\lambda}{4}(3x + 5)$, $x \in R$ και $h(x) = \dfrac{4x - 5}{3}$, $x \in R$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση $f = g \circ h$ ορίζεται για κάθε τιμή του $x \in R$ και έχει τύπο

$$f(x) = (g \circ h)(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x.$$

Μονάδες 5

Δ2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

Μονάδες 8

Δ3. Για $\lambda = 1$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x) + 2x}{x^4 + x - 14}$.

Μονάδες 6

Δ4. Για $\lambda = 1$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu^3 x}{f(x) + x}$.

Μονάδες 6

ΑΠΟ 21/10/2017 ΕΩΣ 11/10/2017

1η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Νοεμβρίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

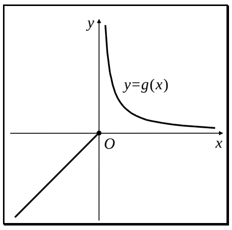
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελίδα 74.

Α2. α. Ψευδής.

β. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x\ , \ x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}\ , \ x>0 \end{cases}$



Α3. Ορισμός σελίδα 70.

Α4. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^3 < x_2^3$ και $7x_1 < 7x_2 \Leftrightarrow 7x_1 - 5 < 7x_2 - 5$ οπότε $x_1^3 + 7x_1 - 5 < x_2^3 + 7x_2 - 5 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και 1-1.

Β2.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$.
- $f(0) = -5$ και $f(1) = 3$ άρα $f(0)\cdot f(1) < 0$.

Επομένως από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι "$1-1$".

Β3. Είναι:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+7x-8}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+8)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+8) = 10.$$

Για να είναι η συνάρτηση g συνεχής στο $x_0 = 1$ θα πρέπει

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) \Leftrightarrow a^2+3a = 10 \Leftrightarrow a^2+3a-10 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ ή } \alpha = -5.$$

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)\cdot\eta\mu x}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^3+7x-5)\cdot\eta\mu x}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+7x-5}{x^3}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1\cdot 0 = 0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+7x-5}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1.$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|}$ οπότε $-\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = 0$ επομένως από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Β5. Είναι $f(\lambda^3-5\lambda) = f(2\lambda-6) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} \lambda^3-5\lambda = 2\lambda-6 \Leftrightarrow \lambda^3-7\lambda+6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = 2$ ή $\lambda = -3$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 1+e^{x_1} < 1+e^{x_2} \Leftrightarrow \ln(1+e^{x_1}) < \ln(1+e^{x_2}) \Leftrightarrow -\ln(1+e^{x_1}) > -\ln(1+e^{x_2}), (1)$ και

$-e^{x_1} > -e^{x_2} \Leftrightarrow 1-e^{x_1} > 1-e^{x_2} \Leftrightarrow \ln(1-e^{x_1}) > \ln(1-e^{x_2}), (2).$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$\ln(1-e^{x_1}) - \ln(1+e^{x_1}) > \ln(1-e^{x_2}) - \ln(1+e^{x_2}) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y$.

$$f(x)=y \Leftrightarrow \ln(1-e^x)-\ln(1+e^x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)=y \Leftrightarrow e^y=\frac{1-e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow e^y+e^x\cdot e^y=1-e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x\cdot e^y+e^x=1-e^y \Leftrightarrow e^x(e^y+1)=1-e^y \Leftrightarrow e^x=\frac{1-e^y}{e^y+1} \Leftrightarrow x=\ln\frac{1-e^y}{e^y+1}, y<0$$

Επειδή $\frac{1-e^y}{e^y+1}>0 \Leftrightarrow 1-e^y>0 \Leftrightarrow e^y<1 \Leftrightarrow e^y<e^0 \Leftrightarrow y<0$.

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\frac{1-e^x}{1+e^x}, x<0$.

Γ3. Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$ αφού $f\downarrow$ και $-x_1>-x_2$.

Άρα $f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2 \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$.

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

Είναι $f(x)-f(-1)<x+1 \Leftrightarrow f(x)-x<f(-1)-(-1) \Leftrightarrow g(x)<g(-1) \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} x>-1$ και επειδή $x\in(-\infty,0)$ άρα $-1<x<0$.

Γ4.

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

Αν θέσουμε $u=\frac{1-e^x}{1+e^x}$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x}=\frac{1-0}{1+0}=1$ οπότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln 1=0$.

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-1)x^3+x^2+6}{f(-3)x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-1)x^3}{f(-3)x^2}=\frac{f(-1)}{f(-3)}\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ και

$f(A)=D_{f^{-1}}=(-\infty,0)$ οπότε $\frac{f(-1)}{f(-3)}>0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να ορίζεται η $g\circ h$ πρέπει $x\in D_h$ και $h(x)\in D_g$ ή ισοδύναμα $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)\in\mathbb{R}$ που ισχύει. Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f(x)=(g\circ h)(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{3h^2(x)+30h(x)+95}-\frac{\lambda}{4}(3h(x)+5)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{3\frac{(4x-5)^2}{9}+30\frac{4x-5}{3}+95}-\frac{\lambda}{4}\left(3\frac{4x-5}{3}+5\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{16x^2-40x+25}{3}+\frac{120x-150}{3}+\frac{285}{3}}-\lambda x=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{16x^2+80x+160}{3}}-\lambda x=\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x.$$

Άρα $f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x$ με $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Για $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)=|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda x=x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda\right)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda\right)=1-\lambda$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $1-\lambda>0\Leftrightarrow\lambda<1$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
- Αν $1-\lambda<0\Leftrightarrow\lambda>1$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.
- Αν $1-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=1$ έχουμε $f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-x$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5x+10}+x\right)}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+10-x^2}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+10}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{10}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1\right)}=\frac{5}{2}.$$

Δ3. Για $\lambda=1$

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)+2x}{x^4+x-14}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5x+10}+x}{x^4+x-14}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+10-x^2}{(x+2)(x^3-2x^2+4x-7)(\sqrt{x^2+5x+10}-x)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{5(x+2)}{(x+2)(x^3-2x^2+4x-7)(\sqrt{x^2+5x+10}-x)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{5}{(x^3-2x^2+4x-7)(\sqrt{x^2+5x+10}-x)}=-\frac{5}{124}$$

Δ4. Για $\lambda=1$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\eta\mu^3 x}{f(x)+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\eta\mu^3 x}{\sqrt{x^2+5x+10}-x+x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\eta\mu^3 x\right).$$

Έχουμε $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\eta\mu^3 x\right|\le\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right|$

οπότε $-\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\eta\mu^3 x\le\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right|$

Επειδή $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2+5x+10\right)=\lim_{x\to +\infty}x^2=+\infty$ είναι $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+5x+10}=+\infty$

οπότε $\lim_{x\to +\infty}\left(-\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right|\right)=\lim_{x\to +\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right|=0$.

Επομένως από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\eta\mu^3 x\right)=0$.