2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Παρασκευή 29 Δεκεμβρίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει ότι:

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1$$

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.*

i) Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει μέγιστο για x=2, τότε για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \geq 2$

ii) Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα ψ΄ψ

iii) Αν η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $g(x) = -f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

iv) Αν ισχύει $0 < x < \frac{\pi}{2}$, τότε $ημ2x > 0$

v) Αν ημx=1, τότε ισχύει πάντα συνx=0

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Αν ισχύει:

$$6ημ^2x - ημx - 1 = 0 \text{ και } \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

Β1. Να βρείτε το $ημx = -\frac{1}{3}$

Μονάδες 10

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{3ημx - 9συν^2x}{16εφ^2x + σφ^2x - 1}$$

Μονάδες 7

Β3. Να λυθεί η εξίσωση : $2ημ^2x + 5συνx - 4 = 0$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{ημ(3π - x) \cdot εφ(\frac{π}{2} - x) \cdot συν(8π - x)}{συν(3π - x) \cdot σφ(π - x) \cdot συν(\frac{5π}{2} - x)}$$

Μονάδες 12

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{συνω}{1 + εφω} - \frac{ημω}{1 + σφω} = συνω - ημω$$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 5$ και $f(7) = 3$
- $g(x) = αx^3 + βx$, $α, β \in \mathbb{R}$, με $g(1)=3$ και $g(2)=12$

Δ1. Να αποδείξετε ότι α=1 και β=2

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η g είναι περιττή

Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f(x^2 + 6x) - 3\right) < 5$

Μονάδες 8

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 26 Οκτωβρίου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ

Α2. ΘΕΩΡΙΑ

Α3. 1-Λ, 2-Σ, 3-Σ, 4-Σ, 5-Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτω $\eta\mu x=\kappa,\ \kappa<0$ γιατί βρισκόμαστε στο 3^{o} τεταρτημόριο και το ημίτονο είναι αρνητικό, άρα : $6\kappa^2-\kappa-1=0$, από την εξίσωση έχουμε $\kappa=\frac{1}{2}$ που απορρίπτεται, και $\kappa=-\frac{1}{3}$. Άρα $\eta\mu x=-\frac{1}{3}$

Β2.

Είναι $\sigma\upsilon\nu x=-\sqrt{1-\eta\mu^2 x}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{\sqrt{8}}{3}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ \text{ και }\ \sigma\varphi x=2\sqrt{2}$$

$$A=\frac{3\eta\mu x-9\sigma\upsilon\nu^2 x}{16\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\varphi^2 x-1}=\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-9\left(\frac{8}{9}\right)}{16\cdot\frac{1}{8}+8-1}=\frac{-1-8}{2+8-1}=\frac{-9}{9}=-1$$

Β3.
Είναι :

$$2\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(1-\sigma\upsilon\nu^2 x) + 5\sigma\upsilon\nu x - 4 = 0 \Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$$

Θέτουμε:

$\sigma\upsilon\nu x = \omega, -1 \le \omega \le 1 \qquad -2\omega^2 + 5\omega - 2 = 0$

$$\omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.
Είναι :

$$\eta\mu(3\pi - x) = \eta\mu(2\pi + \pi - x) = \eta\mu(\pi - x) = \eta\mu\, x$$

$$\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - x) = \sigma\varphi x$$

$$\sigma\upsilon\nu(8\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(4 \cdot 2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + \pi - x) = \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\varphi(\pi - x) = -\sigma\varphi x$$

$$\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{2} - x) = \sigma\upsilon\nu(\frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + \frac{\pi}{2} - x) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - x) = \eta\mu x$$

$$\text{Άρα } K = \frac{\eta\mu(3\pi - x)\cdot\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - x)\cdot\sigma\upsilon\nu(8\pi - x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x)\cdot\sigma\varphi(\pi - x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{2} - x)} = \frac{\eta\mu x\cdot\sigma\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{-\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\sigma\varphi x)\cdot\eta\mu x} = 1$$

Γ2.
Είναι

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{K+\varepsilon\varphi\omega} - \frac{\eta\mu\omega}{K+\sigma\varphi\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega} - \frac{\eta\mu\omega}{1+\sigma\varphi\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}} - \frac{\eta\mu\omega}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}+\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}} - \frac{\eta\mu\omega}{\frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu\omega}+\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\frac{\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}} - \frac{\eta\mu\omega}{\frac{\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega}{\eta\mu\omega}} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega} - \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega} = \frac{(\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega)(\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega} = \sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι : $g(1)=3 \Leftrightarrow \alpha+\beta=3$ (1) και $g(2)=12 \Leftrightarrow 8\alpha+2\beta=12 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=6$ (2)

Αφαιρούμε την (2)-(1) κατα μέλη : $4\alpha+\beta-\alpha-\beta=6-3 \Leftrightarrow 3\alpha=3 \Leftrightarrow \alpha=1$ και β=2

Δ2.

Είναι $g(x)=x^3+2x$, $x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ άρα : $g(-x)=(-x)^3+2(-x)=-x^3-2x=-g(x)$ άρα g περιττή

Δ3. Είναι g(1)=2 και g(2)=12

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x_2$ (1) και $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3$ (2)

Προσθετουμε (1)+(2) κατα μέλη $x_1^3+2x_1<x_2^3+2x_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα g γνησίως αύξουσα.

Δ4. $f\left(f(x^2+6x)-3\right)<5 \Leftrightarrow f\left(f(x^2+6x)-3\right)<f(0) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x^2+6x)-3>0 \Leftrightarrow f(x^2+6x)>3$

$\Leftrightarrow f(x^2+6x)>f(7) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x^2+6x<7 \Leftrightarrow x^2+6x-7<0$

Άρα $x \in (-7,1)$