# 3η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

**ΤΑΞΗ: Β ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**Ημερομηνία: Πέμπτη 12 Απριλίου 2018**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

---

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1**. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου $c: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $xx_1+yy_1=\rho^2$.

**Μονάδες 10**

**Α2**. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

**Μονάδες 5**

**Α3**. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.*

i. Αν $\vec{\alpha}=(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ τότε $|\vec{\alpha}|=1$.

ii. Ισχύει $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{\alpha}$ για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

iii. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ έχουν εξίσωση της μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.

iv. Η ακτίνα ρ του κύκλου $c: x^2+y^2=\alpha^2$ είναι ίση με α.

v. Αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2>4\Gamma$, τότε η εξίσωση $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο.

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}=(1,-3)$, $\vec{\beta}=(1,2)$ και $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$.

**Β1.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}$ και στη συνέχεια το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

**Μονάδες 7**

**Β2.** Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$.

**Μονάδες 6**

**Β3.** Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

**Μονάδες 6**

**Β4.** Αν $\vec{u}=(\lambda^2-4,-\lambda)$ να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε $\vec{u}\perp\vec{\alpha}$.

**Μονάδες 6**

## <u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνονται τα σημεία Α(3, 2), Β(5, α-1) και Γ(4, 1).

**Γ1.** Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α τα σημεία Α, Β και Γ είναι κορυφές τριγώνου;

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Αν το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με 2 να βρείτε τις τιμές του α.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Για $\alpha=-3$ να βρείτε τις εξισώσεις της πλευράς ΒΓ και της διαμέσου ΑΜ.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών ΒΓ και $\eta: -3x+2y+7=0$.

**Μονάδες 6**

## <u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda x+(2\lambda-6)y+5-2\lambda=0$ (1).

**Δ1.** Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε ποιος από τους παραπάνω κύκλους εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να βρείτε ποιο σημείο του γεωμετρικού τόπου των κέντρων των κύκλων απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια να υπολογίσετε πόσο είναι αυτή.

**Μονάδες 7**

**ΤΑΞΗ: Β ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**Ημερομηνία: Πέμπτη 12 Απριλίου 2018**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία σελίδα 83.

**Α2.** Θεωρία σελίδα 41.

**Α3. i.** Σωστό **ii.** Λάθος **iii.** Λάθος **iv.** Λάθος **v.** Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Είναι $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+4\vec{\beta}=(1,-3)+4(1,2)=(1,-3)+(4,8)=(1+4,-3+8)=(5,5)$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1\cdot 1+(-3)\cdot 2=1-6=-5$.

**Β2.** Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$. Ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega=\frac{5}{5}=1$. Όμως είναι x=5>0 και y=5>0 άρα $0<\omega<\frac{\pi}{2}$. Επομένως $\omega=\frac{\pi}{4}$.

**Β3.** Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{-5}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{-5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{-5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=$

$=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίση με $\frac{3\pi}{4}$.

**Β4.** Ισχύει $\vec{u}\perp\vec{\alpha}$ οπότε
$\vec{u}\cdot\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow\lambda^2-4+(-3)\cdot(-\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda^2+3\lambda-4=0\Leftrightarrow\lambda=-4\ \acute{\eta}\ \lambda=1$.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Για να είναι τα σημεία Α, Β και Γ κορυφές τριγώνου πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι μη συγγραμμικά. Είναι:
$\overrightarrow{AB}=(5-3,\alpha-1-2)=(2,\alpha-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(4-3,1-2)=(1,-1)$. Η ορίζουσά τους είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}2 & \alpha-3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-1\cdot(\alpha-3)=-2-\alpha+3=1-\alpha$.

Πρέπει $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\neq 0$ οπότε $1-\alpha\neq 0$ δηλαδή $\alpha\neq 1$. Άρα τα σημεία Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}$.

**Γ2.** $(AB\Gamma)=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}|1-\alpha|=2\Leftrightarrow|\alpha-1|=4\Leftrightarrow\alpha-1=4\ ή\ \alpha-1=-4$ $\Leftrightarrow\alpha=5\ ή\ \alpha=-3$. Οι τιμές είναι δεκτές.

**Γ3.** Για $\alpha=-3$ είναι $B(5,-4)$. Η ευθεία ΒΓ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=\frac{1-(-4)}{4-5}=\frac{5}{-1}=-5$ και εξίσωση $y-1=-5(x-4)\Leftrightarrow y=-5x+20+1\Leftrightarrow y=-5x+21$.

Έστω Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ. Θα έχει συντεταγμένες $x=\frac{5+4}{2}=\frac{9}{2}$ και $y=\frac{-4+1}{2}=-\frac{3}{2}$. Επομένως θα είναι $M\left(\frac{9}{2},-\frac{3}{2}\right)$. Η ευθεία ΑΜ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=\frac{-\frac{3}{2}-2}{\frac{9}{2}-3}=\frac{-\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{7}{3}$. Η εξίσωσή της θα είναι:

$$y-2=-\frac{7}{3}(x-3)\Leftrightarrow 3y-6=-7(x-3)\Leftrightarrow 3y-6=-7x+21\Leftrightarrow 7x+3y-27=0.$$

**Γ4.** Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία ΒΓ: $5x+y-21=0$ είναι το $\vec{a}=(1,-5)$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία $\eta:-3x+2y+7=0$ είναι το $\vec{\beta}=(2,3)$.
Η γωνία θ των δύο ευθειών ισούται με τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{1\cdot 2+(-5)\cdot 3}{\sqrt{1^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{2-15}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}=\frac{-13}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=\frac{-13}{13\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $\theta = 135^0$ οπότε η οξεία γωνία των δύο ευθειών είναι ίση με $45^0$.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Είναι $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma = (-2\lambda)^2 + (2\lambda - 6)^2 - 4(5 - 2\lambda) =$
$= 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - 24\lambda + 36 - 20 + 8\lambda = 8\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 8(\lambda^2 - 2\lambda + 2) > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ επειδή το τριώνυμο $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ και θα είναι $\lambda^2 - 2\lambda + 2 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1) είναι $\mathrm{K}\left(-\frac{-2\lambda}{2}, -\frac{2\lambda - 6}{2}\right)$ δηλαδή $\mathrm{K}(\lambda, 3 - \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Οι ακτίνες των κύκλων της (1) θα δίνονται από την ισότητα $\rho = \frac{\sqrt{8(\lambda^2 - 2\lambda + 2)}}{2} = \sqrt{2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Δ2.** Έστω $\mathrm{K}(x, y)$ τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1). Είναι $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.
Επομένως $y = -x + 3$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι η ευθεία $y = -x + 3$.

**Δ3.** Για να εφάπτεται ο κύκλος $c_1$ στον άξονα $y'y$ πρέπει να ισχύει:
$d(K, y'y) = \rho \Leftrightarrow |\lambda| = \sqrt{2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)} \Leftrightarrow \lambda^2 = 2\lambda^2 - 4\lambda + 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.
Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι: $c_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$. Θα έχει κέντρο το σημείο $\mathrm{K}_2(2,1)$ και ακτίνα ίση με $\sqrt{2(2^2 - 2 \cdot 2 + 2)} = \sqrt{4} = 2$.

**Δ4.** Για να προσδιορίσουμε το σημείο Δ της ευθείας $\varepsilon : y = -x + 3$ που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων Ο, θα βρούμε την ευθεία ζ που διέρχεται από το Ο και είναι κάθετη στην ευθεία ε. Το ζητούμενο σημείο Δ είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ.
$\varepsilon \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow -1 \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = 1$. Άρα η ευθεία ζ έχει εξίσωση $y = x$.

$$\begin{cases} y=-x+3 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-x+3 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=3 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$ οπότε είναι $\Delta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Είναι: $d_{\min}=d(O,\varepsilon)=\dfrac{|0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.