	ΑΠΟ 22/12/2018 ΕΩΣ 05/01/2019
	1η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 3 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι $|α + β| ≤ |α| + |β|$ για κάθε $α, β ∈ ℝ$.

Μονάδες 10

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

- i. Αν $α ≤ 0$ και n άρτιος θετικός ακέραιος, τότε ισχύει $\sqrt[n]{α^n} = α$.
- ii. Ισχύει η ισοδυναμία $αγ = βγ ⇔ α = β$.
- iii. Ισχύει η ισοδυναμία $α^2 + β^2 = 0 ⇔ α = 0$ ή $β = 0$.
- iv. Για κάθε πραγματικό αριθμό $α$ ισχύει $|α| ≥ α$.
- v. Η εξίσωση $αx + β = 0$ έχει μοναδική λύση αν $α ≠ 0$ και $β = 0$.

Μονάδες 10

A3. Να γράψετε τον αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού $α$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 5| < 4$ και $|y - 4| < 3$

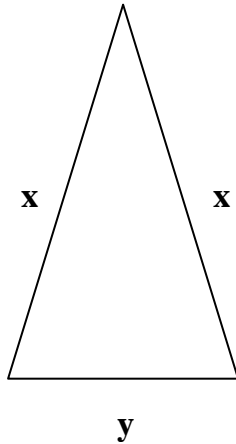
1. Να βρεθούν τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται το x .

Μονάδες 5

2. Να βρεθούν τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται το y .

Μονάδες 5

B2. Να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου και του εμβαδού αν το ύψος του παρακάτω ισοσκελούς τριγώνου δίνεται από την ανίσωση $|y-2| < 1$.



Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Α. Να δείξετε ότι : $2x^2 + y^2 + 4x - 2xy + 4 \geq 0$

Μονάδες 7

Β. Πότε ισχύει η ισότητα; Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών x, y .

Μονάδες 5

Γ2. Αν $x = -2$ και $y = -2$, οι τιμές των x, y από το ερώτημα **Γ1**, να λυθεί η εξίσωση

$$|\omega + x| = 3|\omega - y|$$

Μονάδες 5

Γ3. Αν $A = |x| - |x + \omega| + |2y| + 4|x - y|$, όπου x, y οι τιμές από το ερώτημα **Γ1** και ω η μικρότερη τιμή της εξίσωσης από το ερώτημα **Γ2**, να λύσετε την εξίσωση :

$$A^{2019} + 2z = 6$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}, \text{ με } 2 < x < 3$$

1η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

Δ1. Να αποδειχθεί ότι η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του x.

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης B.

Μονάδες 5


Δ3. Αν $A = 2$ και $B = -2$ τότε :

1. Να λυθεί η εξίσωση $|x - B| = Ax - 2$.

Μονάδες 6

2. Να λυθεί η εξίσωση $(\lambda - A)(\lambda - B)x = \lambda^2 + 2\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

	ΑΠΟ 22/12/2018 ΕΩΣ 05/01/2019
	1η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 3 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία

A2. 1-Α, 2-Α, 3-Α, 4-Σ, 5-Σ

A3. Θεωρία

ΘΕΜΑ Β

B1. 1. Είναι $|x-5| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-5 < 4 \Leftrightarrow -4+5 < x < 4+5 \Leftrightarrow 1 < x < 9$

2. Είναι $|y-4| < 3 \Leftrightarrow -3 < y-4 < 3 \Leftrightarrow -3+4 < y < 3+4 \Leftrightarrow 1 < y < 7$

B2. Περίμετρος = $2x+y$, άρα

$$\begin{cases} 1 < x < 9 \\ 1 < y < 7 \end{cases} \stackrel{\cdot(2) \text{ την πρώτη ανίσωση}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2 < 2x < 18 \\ 1 < y < 7 \end{cases} \stackrel{\text{πρόσθεση κατά μέλη}}{\Leftrightarrow} 3 < 2x+y < 25 \Leftrightarrow 3 < \Pi < 25.$$

Ύψος $|v-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < v-2 < 1 \Leftrightarrow -1+2 < v < 1+2 \Leftrightarrow 1 < v < 3$

Εμβαδόν: $E = \frac{y \cdot v}{2}$, δηλαδή $\begin{cases} 1 < v < 3 \\ 1 < y < 7 \end{cases} \stackrel{\text{πολ./ζούμε κατά μέλη}}{\Leftrightarrow} 1 < y \cdot v < 21 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{y \cdot v}{2} < \frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < E < \frac{21}{2}.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $2x^2 + y^2 + 4x - 2xy + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (x-y)^2 \geq 0.$

Το = ισχύει όταν : $(x-2)^2 + (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2=0$ και $x-y=0 \Leftrightarrow x=2$ και $y=x=2.$

$$\Gamma 2. |\omega + x| = 3|\omega - y| \Leftrightarrow |\omega - 2| = 3|\omega + 2| \Leftrightarrow \omega - 2 = 3(\omega + 2) \text{ ή } \omega - 2 = -3(\omega + 2) \Leftrightarrow$$

$$\omega - 2 = 3\omega + 6 \text{ ή } \omega - 2 = -3\omega - 6 \Leftrightarrow -2\omega = 8 \text{ ή } 4\omega = -4 \Leftrightarrow \omega = -4 \text{ ή } \omega = -1.$$

Γ3. Η μικρότερη τιμή του ω είναι -4 .

$$\text{Άρα } A = |x| - |x + \omega| + |2y| + 4|x - y| = |-2| - |-2 - 4| + |2 \cdot (-2)| + 4|-2 + 2| = 2 - 6 + 4 + 0 = 0$$

$$\text{Άρα } A^{2019} + 2z = 6 \Leftrightarrow 0^{2019} + 2z = 6 \Leftrightarrow 2z = 6 \Leftrightarrow z = 3$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. A = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \frac{\sqrt{(x - 2)^2}}{x - 2} - \frac{\sqrt{(x - 3)^2}}{x - 3} = \frac{|x - 2|}{x - 2} - \frac{|x - 3|}{x - 3}$$

$$\text{Αφού } 2 < x < 3 \Leftrightarrow 2 - 2 < x - 2 < 3 - 2 \Leftrightarrow 0 < x - 2 < 1 \text{ άρα } x - 2 > 0$$

$$\text{Και } 2 < x < 3 \Leftrightarrow 2 - 3 < x - 3 < 3 - 3 \Leftrightarrow -1 < x - 3 < 0 \text{ άρα } x - 3 < 0$$

$$\text{Τότε } A = \frac{|x - 2|}{x - 2} - \frac{|x - 3|}{x - 3} = \frac{x - 2}{x - 2} + \frac{x - 3}{x - 3} = 1 + 1 = 2$$

$$\Delta 2. B = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{2^2 - \sqrt{2}^2} - \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{2^2 - \sqrt{2}^2} =$$


$$\frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{2} - \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{2} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} - \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \frac{-2 - 2}{2} = -2$$

$$\Delta 3. |x - B| = Ax - 2 \Leftrightarrow |x + 2| = 2x - 2, \text{ πρέπει } 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{Άρα } x - 2 = 2x - 2 \text{ ή } x - 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ δεκτή ή } x = 0 \text{ απορρίπτεται.}$$

$$\Delta 4. (\lambda - A)(\lambda - B)x = \lambda^2 + 2\lambda \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)x = \lambda(\lambda + 2)$$

$$\text{Αν } (\lambda - 2)(\lambda + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2 \text{ και } \lambda \neq -2 \text{ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση } x = \frac{\lambda}{\lambda - 2}$$

	ΑΠΟ 22/12/2018 ΕΩΣ 05/01/2019
	1η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

$$\text{Αν } (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2$$

{ Για $\lambda = 2$ τότε $0x = 8$ αδύνατη για καθε πραγματικό αριθμό
{ Για $\lambda = -2$ τότε $0x = 0$ αόριστη, ισχύει για κ αθε πρ.αριθμο