2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ημερομηνία: Πέμπτη 2 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου c: $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 8

Α2. Τι ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

1. Αν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, δεν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.
2. Η εξίσωση $(x + y)^2 – 4 = 2xy$ παριστάνει κύκλο.
3. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
4. Οι ευθείες $y = 4x + 2$ και $12x – 3y + 3 = 0$ είναι παράλληλες.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$ και $\vec{\beta} = (\mu,1)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του μ για την οποία ισχύει η σχέση:

Α. $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

Μονάδες 4

Β. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Μονάδες 4

Β2. Δίνονται τα σημεία Α(4, - 3), Β(10, 5), Γ(1, 5) και Δ(- 2, 1).

Α. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με ΑΒ//ΓΔ.

Μονάδες 7

Β. Να εκφραστεί το διάνυσμα $\overrightarrow{MN}$, ως προς το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, όπου Μ και Ν μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι ευθείες ($ε_1$): 3x – y = 2 και ($ε_2$) : x + 2y = 10.

Γ1. Να βρεθεί το σημείο τομής τους.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ($ε_1$) και ($ε_2$) και όπου είναι γνωστό ότι η (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία (η): 2x + y = 1.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α(0,8) και Β(1,6) ανήκουν στην ευθεία (ε) και να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4κx - 2(κ – 2)y + 4κ^2 – 4κ + 4 = 0$, με $κ \in \mathbb{R} - \{0\}$. (1)

Δ1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε επιτρεπτή τιμή του κ, η (1) παριστάνει κύκλο.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων, για $κ \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Μονάδες 10

Δ3. Να εξετασθεί, αν κάποιος από τους παραπάνω κύκλους εφάπτεται σε κάποιον από τους άξονες συντεταγμένων.

Μονάδες 7

Ωρίωνας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ	ΑΠΟ 22/04/2016 ΕΩΣ 04/05/2016 **2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ**

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 2 Μαΐου 2019

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σελίδα 83 από σχολικό βιβλίο.

Α2. Θεωρία. Σελίδα 41 από σχολικό βιβλίο.

Α3. 1. Λάθος 2. Σωστό 3. Σωστό 4. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. **Α.** Επειδή $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ τότε $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0$ δηλαδή $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \mu & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{3}$.

Β. Επειδή $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ δηλαδή $1\cdot\mu + 3\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = -3$.

Β2. **Α.** $\overrightarrow{AB} = (6, 8)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (3, 4)$, άρα $\overrightarrow{AB} = 2(3,4) = 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, οπότε $AB \upuparrows \Gamma\Delta$, άρα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Β. Θα είναι $M(\frac{4-2}{2}, \frac{-3+1}{2})$ άρα $M(1, -1)$ και όμοια $N(\frac{11}{2}, 5)$ επομένως $\overrightarrow{MN} = (\frac{9}{2}, 6)$. Έχω ότι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ \frac{9}{2} & 6 \end{vmatrix} = 6\cdot 6 - 8\cdot\frac{9}{2} = 36 - 36 = 0$ δηλαδή $MN \parallel AB$.

Αν $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{AB}$, τότε πρέπει: $\begin{cases} \frac{9}{2} = 6\lambda \\ 6 = 8\lambda \end{cases}$,άρα τότε κοινή λύση αυτών είναι η $\lambda = \frac{3}{4}$, δηλαδή $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ άρα $\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{AB}$, αφού $\lambda = \frac{3}{4} > 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το σημείο τομής των ευθειών ($ε_1$): 3x – y = 2 και ($ε_2$) : x + 2y = 10 προκύπτει από την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$.

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτει ότι το σημείο τομής έχει συντεταγμένες (2,4).

Γ2. Η ευθεία (η) έχει εξίσωση 2x + y = 1 δηλαδή (η): y = -2x + 1. Εφόσον η ευθεία (ε) είναι παράλληλη με την ευθεία (η) τότε θα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Άρα $λ_ε = λ_η = -2$. Ακόμη, η (ε) διέρχεται από το σημείο (2,4) οπότε θα έχει εξίσωση της μορφής:

$$y - 4 = -2(x - 2)$$

Οπότε, (ε): y = -2x + 8.

Γ3. Οι συντεταγμένες των σημείων Α(0,8) και Β(1,6) επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε), οπότε ανήκουν στην ευθεία.

Έστω το σημείο $Μ(x_Μ,y_Μ)$ μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Τότε, το σημείο Μ θα έχει συντεταγμένες $\left(\frac{0+1}{2},\frac{8+6}{2}\right)$, δηλαδή $Μ\left(\frac{1}{2}, 7\right)$. Ακόμη, $λ_{\overrightarrow{AB}} = \frac{6-8}{1-0} = -2.$ Η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $-\frac{1}{λ_{\overrightarrow{AB}}} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$. Οπότε, η μεσοκάθετος θα έχει εξίσωση της μορφής : $y - 7 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Άρα, η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ θα έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + \frac{27}{4}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η (1) $\Leftrightarrow (x + 2κ)^2 + (y - (κ - 2))^2 = κ^2$, άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(- 2κ,κ – 2) και ακτίνα ρ = |κ|.

Δ2. Έστω x = - 2κ (2) και y = κ – 2 ,άρα κ = y + 2, οπότε η (2) δίνει ότι x = -2(y + 2)$\Leftrightarrow$ $x + 2y + 4 = 0$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το κέντρο Κ(x, y) κινείται πάνω στην ευθεία (ε): x+2y+4 = 0, που είναι και ο ζητούμενος Γεωμετρικός Τόπος.

Δ3. Γνωρίζουμε ότι ένας κύκλος : $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = ρ^2$, εφάπτεται:

α) στον άξονα x΄x , όταν $|y_o| = ρ$, δηλ. |κ – 2|=|κ|, άρα $\begin{cases} κ - 2 = κ, \text{ αδύνατη ή} \\ κ - 2 = -κ \Leftrightarrow κ = 1 \end{cases}$, οπότε ο κύκλος που εφάπτεται στον x΄x είναι ο: $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$.

β) στον άξονα y΄y, όταν $|\chi_o| = \rho$, δηλ. $|-2\kappa|=|\kappa|$, άρα τότε έχουμε ότι $\kappa = 0$, που όμως απορρίπτεται από τα δεδομένα της σχέσης (1),άρα δεν υπάρχει κύκλος που να εφάπτεται στον άξονα y΄y.