

	ΑΠΟ 22/12/2018 ΕΩΣ 05/01/2019
	2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ημερομηνία: Πέμπτη 2 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Μονάδες 7

A2. i) Να διατυπώσετε το θ . Fermat.

ii) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης;

Μονάδες 4

A3.

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σ' ένα διάστημα Δ , τότε θα ισχύει πάντοτε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A4. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.

i) Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ τότε η f είναι σταθερή στο \mathbb{R}^* .

ii) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

iii) Αν F, G είναι παράγουσες της f στο Δ τότε οι F και G είναι ίσες.

2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

iv) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + x - 1$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x(x-1) = e^x\alpha - 1$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε την ασύμπτωτη (ε) της συνάρτησης στο $+\infty$

Μονάδες 5

B4. Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την (ε) και τις ευθείες $x=0$ και $x=\alpha$ με $\alpha > 0$, είναι $E(\alpha) = -e^{-\alpha} + 1$

Μονάδες 4

B5. Αν το α μειώνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού την χρονική στιγμή που το α είναι 2 μονάδες.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $\text{συν}^2 f(x) + 4f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να δείξετε ότι

$$f^{-1}(x) = 4x + \text{συν}^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 6

	ΑΠΟ 22/12/2018 ΕΩΣ 05/01/2019
	2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = \eta \mu x$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = e, f'(1) = 0.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x f'(x) - f(x) + e^{\frac{1}{x}}$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Δ3. Να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Δ4. Να δείξετε ότι :

α. Η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x)$ είναι στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι

$$y = \frac{1}{2}(\sqrt{e})x + (\sqrt{e}).$$

Μονάδες 3

β. $2x e^{\frac{1}{x}} \geq (x+2)(\sqrt{e})$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 3

γ. $\frac{7\sqrt{e}}{4} < \int_1^2 f(x) dx < 2\sqrt{e}$

Μονάδες 4