**2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ**

**ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**Ημερομηνία: Σάββατο 30 Μαΐου 2020**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

# ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x, \alpha>0$ . Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x\cdot\ln\alpha$

**Μονάδες 7**

**Α2. α.** Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano.

**β.** Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α,β) και πότε είναι συνεχής σε ένα κλειστό [α,β].

**Μονάδες 8**

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

**α.** Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο (α,β).

**β.** Σε μια συνάρτηση 1-1 κάθε ευθεία παράλληλη στον x΄x έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

**γ.** Αν η f είναι συνεχής στο $x_0$ και η g είναι συνεχής στο $x_0$ τότε η $f\circ g$ είναι συνεχής στο $x_0$

**δ.** Έστω η συνάρτηση $f: A\to\Re$ η οποία είναι 1 – 1. Ισχύει ότι $f[f^{-1}(x)] = x$ για κάθε $x \in A$.

**ε.** Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο [α,β], με $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει μία μόνο ρίζα στο (α,β).

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$f(x) = 2 - \sqrt{x+4}$ και $g(x) = \sqrt{5-x}$.

**Β1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 – 1 και να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}$.

**Μονάδες 8**

**Β2.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

**Μονάδες 8**

**Β3.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 4} \frac{h(x) - x + 1}{\sqrt{x} - 2} = 12$$

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 4} \frac{(f^{-1} \circ g)(x) + h(x)}{x - 4}$.

**Μονάδες 9**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x$, με $x \in (0, +\infty)$

**Γ1.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

**Μονάδες 9**

**Γ2.** Θεωρούμε και τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ $x \in (0, +\infty)$.

**i)** **Να** μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 8**

**ii)** Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln(x^2+3)\ln(2x^2+3) < \ln(2x^2+2)\ln(x^2+4)$$

**Μονάδες 8**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)}+f(x)=x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της $M\big(0, f(0)\big)$.

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f΄ως προς τη μονοτονία .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι $xf'(x)\le f(x)\le \frac{x}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**Μονάδες 5**

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$, ώστε: $2f(\xi)=(\xi-1)\sqrt{e^{\xi}}$ .

**Μονάδες 5**

**ΤΑΞΗ:** **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΜΑΘΗΜΑ:** **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**Ημερομηνία: Σάββατο 30 Μαΐου 2020**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία

**Α2.** Θεωρία

**Α3.** Σ-Σ-Λ-Λ-Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $D_f = [-4, +\infty)$ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$, άρα f γνησίως φθίνουσα

$$D_{f^{-1}} = f([-4,+\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\, f(+4)\right] = (-\infty, 2]$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x+4} = y \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = 2 - y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 4 = (2-y)^2 \Leftrightarrow x = y^2 - 4y$$

Δηλαδή: $f^{-1}(x) = x^2 \quad x \in (-\infty, 2]$.

**Β2.** $D_g = (-\infty, 5]$ $\quad D_{f^{-1}\circ g} = \{x \le 5 \setminus g(x) \le 2\}$

$$\sqrt{5-x} \le 2 \Leftrightarrow 5 - x \le 4 \Leftrightarrow x \ge 1 \Leftrightarrow D_{f^{-1}\circ g} = [1, 5]$$

$$(f^{-1}\circ g)(x) = \sqrt{5-x}^{\,2} - 4\cdot\sqrt{5-x} = 5 - x - 4\sqrt{5-x}\,.$$

**B3.** Θέτουμε: $t(x)=\dfrac{h(x)-x+1}{\sqrt{x}-2}\Leftrightarrow h(x)=\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot t(x)+x-1$.

Έτσι: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-x-4\sqrt{5-x}+\left(\sqrt{x}-2\right)t(x)+x-1}{x-4}=$

$$\lim_{x\to 4}\frac{4-4\sqrt{5-x}}{x-4}+\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)t(x)}{x-4}=1+4=5$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=\ln(x+1)-\ln x>0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\ldots=0$, διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\ldots=0$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x\ln(x+1)-x\ln x+\ln(x+1)\right]=$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[x\ln\frac{x+1}{x}+\ln(x+1)\right]=+\infty,\text{ διότι:}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H.}{=\!=\!=}}\ldots=1$$

**Γ2.** **i)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$g'(x)=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x\ln x}{x(x+1)\left[\ln(x+1)\right]^2}>0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επίσης, είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = 1$$

Τελικά είναι $g(A) = (-\infty, 1)$.

**i)** Με $x \in \mathbb{R}$, η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x^2+4)} < \frac{\ln(2x^2+2)}{\ln(2x^2+3)} \Leftrightarrow g(x^2+3) < g(2x^2+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+3 < 2x^2+2 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

**<u>ΘΕΜΑ Δ</u>**

**Δ1.** $e^{f(0)} + f(0) = 1 \Leftrightarrow e^{f(0)} + f(0) - 1 = 0$

Δηλαδή το $f(0)$ είναι ρίζα της $g(x) = e^x + x - 1$. Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $g(0) = 0$. Άρα η g έχει μοναδική ρίζα το 0, οπότε ισχύει ότι $f(0) = 0$.

**Δ2.** Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + f'(x) = 1 \qquad (1)$$

Για x = 0 βρίσκουμε ότι $f'(0) = \frac{1}{2}$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = \frac{x}{2}$.

**Δ3.** Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}+1} \qquad (2)$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η $f'$ είναι παραγωγίσιμη , με:

$$f''(x) = -\frac{e^{f(x)} \cdot f'(x)}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2} < 0 \qquad (3)$$

Άρα η $f\,'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

**Δ4.** ● Για x = 0, η σχέση ισχύει ως ισότητα.

● Για x > 0, από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(0,x)$, ώστε:

$$f\,'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$$

Όμως η $f\,'$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα:

$$0<\xi<x\Leftrightarrow f\,'(0)>f\,'(\xi)>f\,'(x)\Leftrightarrow\frac{1}{2}>\frac{f(x)}{x}>f\,'(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{2}>f(x)>xf\,'(x)$$

● Για x > 0 εργαζόμαστε ομοίως, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,0]$.

**Δ5.** Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για την $h(x)=2f(x)-(x-1)\sqrt{e^x}$ στο $[0,2]$.

Η h είναι συνεχής στο [0,2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι h(0)=2f(0)+1=1>0

Ισχύει ότι $f(2)\le 1$, από το (δ) και έτσι :

h(2)=2f(2)-e<0 οπότε προκύπτει το ζητούμενο.