Ωρίωνας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

10η ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Δεκεμβρίου 2019

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι :

Αν $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+.....+\alpha_1 x+\alpha_0$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$$

Μονάδες 7

Α2. α. Να διατυπώσετε το Θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής.

β. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano.

Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ τότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

β. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε f(α). f(β) < 0.

γ. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που χωρίζουν ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της δυο διαδοχικές ρίζες της.

δ. Αν η f συνεχής στο [2, 5] και f (2). f(5) > 0 , τότε η f δεν έχει ρίζα στο (2, 5).

ε. Ισχύει $\lim_{x\to+\infty}(x\eta\mu\frac{1}{x})=1$.

στ. Αν τα όρια των f και g στο x_0 υπάρχουν και $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x+2|+|x^2-3|-5}{x-1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-\sqrt{4x^2-4x-3})$

Μονάδες 12

Β2. Αν για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $|f(x)-x^4|\le x^2 ημ\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in R^*$

να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)+x^2-x-2}{x-3}=5$$

Αν η f είναι συνεχής στο $x_1=3$ τότε:

Γ1. Να υπολογίσετε το f(3)

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_2=-3$

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)}{x-3}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω οι συνεχείς στο R συναρτήσεις f και g ώστε $g(1)=2$ και $f(x)\cdot[g(x)-3x]\geq e^x$ για κάθε $x\in R$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο και να βρείτε το πρόσημο της για κάθε $x\in R$.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

Μονάδες 8

Δ2. Αν για $x>0$ ισχύει $f^2(x)-3xf(x)=4x^3\eta\mu\frac{1}{x}+5x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$, όπου $\alpha\in R$ να βρεθεί το α.

Μονάδες 7

Ωρίωνας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ	07/12/2019 **10η ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ**

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Δεκεμβρίου 2019

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Θεωρία

A_2. **α.** Θεωρία

β. Θεωρία

A_3. **α.** Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ. ε.** Σ **στ.** Λ

ΘΕΜΑ Β

B_1. **α.** Είναι $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3>0$ άρα $x+2>0$ κοντά στο 1

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3)=-2<0$ άρα $x^2-3<0$ κοντά στο 1

Έτσι έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2+3-x^2-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2+x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x(x-1)}{x-1}=-1$

β. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2-4x-3}\right)}{2x+\sqrt{4x^2-4x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-4x^2+4x+3}{2x+x\cdot\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{x\cdot\left(2+\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{4}{2+2}=1$$

Β₂. Είναι $-x^2\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\le f(x)-x^4\le x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}$

$$x^4-x^2\eta\mu\frac{1}{x}\le f(x)\le x^4+x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}$$

και έτσι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4+x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4+x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le 1\Rightarrow\left|x^2\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le\left|x^2\right|\Rightarrow$$

με $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left|-x^2\right|\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left|-x^2\right|=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

ΘΕΜΑ Γ

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)+x^2-x-2}{x-3}$ κοντά στο 3 με $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=5$

Τότε $f(x)=(x-3)\cdot g(x)-x^2+x+2$

Γ₁. Επειδή f : συνεχής στο $x_1=3$ ισχύει:

$$f(3)=\lim_{x\to 3}f(x)=0\cdot 5-3^2+3+2=-4$$

Γ₂. $\lim\limits_{x\to -3}f(x)\overset{-x=\omega}{=}\lim\limits_{\omega\to 3}f(-\omega)\overset{f\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{=}\lim\limits_{\omega\to 3}\left[-f(\omega)\right]=-f(3)=f(-3)$

Γ₃. $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\left[f(x)\cdot\dfrac{1}{x-3}\right]=f(3)\cdot\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=-4\cdot(+\infty)=-\infty$

αφού $x-3<0$ για $x>3$

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. **α.** Από τη δοσμένη σχέση $f(x)=[g(x)-3x]\geq e^x>0$

άρα $f(x)\neq 0$ και $g(x)-3x\neq 0$.

Επίσης, f : συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο

για $x=1$ $\quad f(1)\cdot(g(1)-3)\geq e\Rightarrow f(1)\cdot(2-3)>0$

δηλ. $f(x)<0 \quad \forall x\in R$.

β. Η g : συνεχής στο $[0,1]$

- $g(1)=2>0$
- για $x=0$ $\quad f(0)[g(0)-3\cdot 0]>0\Rightarrow f(0)\cdot g(0)>0$

και αφού $f(x)<0 \quad \forall x\in R$.

άρα $g(0)<0$

Έτσι λόγω θεωρήματος ***Bolzano*** η $g(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Δ₂. Ισχύει $\dfrac{f^2(x)}{x^2}-\dfrac{3xf(x)}{x^2}=\dfrac{4x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x^2}+\dfrac{5x}{x^2}$ για $x>0$

δηλ. $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]^2-3\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]=4x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x}$

και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha\in R$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2-3\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(4x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}\overset{\otimes}{\Rightarrow}$$

$$\alpha^2-3\alpha=4+0\Rightarrow\alpha^2-3\alpha-4=0$$

δηλ. $\alpha=-1$ ή $\alpha=4$

$$\otimes \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=\omega}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\omega}\cdot\eta\mu\omega\right)=1$$