1η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ημερομηνία: Σάββατο 24 Οκτωβρίου 2020

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots\alpha_1 x+\alpha_0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x_0.

Μονάδες 10

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν τότε δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$.

β. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\kappa\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lambda\neq\kappa$ και $h(x)\le f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.

γ. Η ισότητα $\eta\mu x=x,\ x\in\mathbb{R}$ ισχύει μόνο για $x=0$.

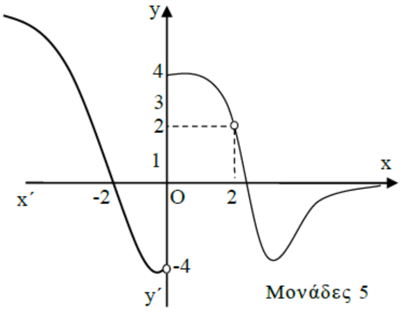
δ. Το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^{2k+1}}$, $k\in\mathbb{R}$ στο μηδέν υπάρχει και είναι το $+\infty$.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Μονάδες 10

Α3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένα τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ...$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ...$

γ) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = ...$ **δ)** $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = ...$

ε) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = ...$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{3x+4}{x-3}$ και $g(x)=x-4\sqrt{x}+4$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(f(x))=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{4\}$.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $g(g(x))=x$, για κάθε $x\in[0,4]$.

Μονάδες 6

Β3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της f.

Μονάδες 7

Β4. Να εξετάσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία στο $[4,+\infty)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{2(x+4)}{x-4}$ και $g(x)=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$.

Γ1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Αν δεν είναι ίσες να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Γ3. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-4)}{2x}\cdot\frac{ημ(x\cdot f(x))}{x+4}$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to-4^+}(x-4)\cdot\ln f(x)\cdot\frac{ημf(x)}{2(x+4)}$.

Μονάδες 10

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^{x+4}-1,\ x<4$ έχει μοναδική ρίζα την $x=-4$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(\mu-2)x^3+3x^2+4}{(\lambda-1)x^2-2x+3}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ αν γνωρίζουμε ότι πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ2. Αν $\mu>2$, να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ

α) όταν $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και

β) όταν $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Μονάδες 8

Δ3. Αν $\lambda = 1$ και $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών μ, α.

Μονάδες 5

Δ4. Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{3}{4} \in \mathbb{R}$ και $\mu \neq 2$, να δείξετε ότι το σημείο $A(\lambda, \mu)$ ανήκει στην ευθεία $3x - 4y + 5 = 0$.

Μονάδες 6

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Σάββατο 24 Οκτωβρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Λ Λ Σ Λ Σ

Α3. **α.** $+\infty$ **β.** 0 **γ.** -4 **δ.** 4 **ε.** 2

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ \dfrac{3x+4}{x-4} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ 3x+4 \neq 3x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ 4 \neq -9 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 4$$

$$f(f(f)) = \frac{3 \cdot \dfrac{3x+4}{x-3} + 4}{\dfrac{3x+4}{x-3} - 3} = \frac{\dfrac{9x+12+4x-12}{x-3}}{\dfrac{3x+4-3x+9}{x-3}} = \frac{13 \cdot x}{13} = x .$$

Β2. $g(x) = x - 4\sqrt{x} + 4 = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 4\sqrt{x} + 4 = \left(\sqrt{x} - 2\right)^2, \quad x \geq 0 .$

Για να ορίζεται η $g \circ g$ πρέπει: $\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x} - 2\right)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$

$$g(g(x))=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}-2\right)^2=\left(\left|\sqrt{x}-2\right|-2\right)^2\underset{\to\sqrt{x}\le 2}{\overset{x\le 4}{=}}\left(2-\sqrt{x}-2\right)^2=\sqrt{x}^2\overset{x\ge 0}{=}x$$

B3. Έστω $x_1,x_2\neq 3$ με

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{3x_1+4}{x_1-3}=\frac{3x_2+4}{x_2-3}\Leftrightarrow 3x_1x_2+4x_2-9x_1-12=3x_1x_2+4x_1-9x_2\Leftrightarrow$$

$13x_1=13x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα η f είναι 1–1 οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε: $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{3x+4}{x-3}=y\Leftrightarrow 3x+4=y\cdot(x-3)\Leftrightarrow 3x+4=y\cdot x-3y\Leftrightarrow$

$$y\cdot x-3x=3y+4\Leftrightarrow x\cdot(y-3)=3y+4\overset{y\neq 3}{\Leftrightarrow}x=\frac{3y+4}{y-3}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{3y+4}{y-3}.$$

Οπότε η αντίστροφη της f έχει τύπο: $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+4}{x-3},x\neq 3$.

$$\left(x\neq 3\Leftrightarrow\frac{3y+4}{y-3}\neq 3\Leftrightarrow 3y+4\neq 3y-9\Leftrightarrow 4\neq -9\ \ \text{ισχύει}\right)$$

B4. Έστω $x_1,x_2\in[4,+\infty)$ με

$$x_1<x_2\overset{x_1,x_2>0}{\Leftrightarrow}\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Leftrightarrow\sqrt{x_1}-2<\sqrt{x_2}-2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x_1}-2\right)^2<\left(\sqrt{x_2}-2\right)^2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

$$\left(x_1\ge 4\Leftrightarrow\sqrt{x_1}\ge 2\Leftrightarrow\sqrt{x_1}-2\ge 0,x_1\ge 4\Leftrightarrow\sqrt{x_1}\ge 2\Leftrightarrow\sqrt{x_1}-2\ge 0\right)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $A_f = \mathbb{R} - \{4\}$.

Για το πεδίο ορισμού της g έχουμε:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}.$$

Άρα $A_g = [0,4) \cup (4,+\infty)$.

Οπότε οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες.

Το ευρύτερο υποσύνολο στο οποίο μπορεί να είναι ίσες είναι το $A = [0,4) \cup (4,+\infty)$.

Τότε

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2 + (\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x} + 4 + (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x})^2 - 4} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{2x+8}{x-4} = \frac{2(x+8)}{x-4} = f(x).$$

Επομένως οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο A.

Γ2.

$$\begin{Bmatrix} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{Bmatrix} 0 \leq x < 4 \\ f(x) \in A_f \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 \leq x < 4 \\ \dfrac{2(x+4)}{x-4} \neq 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 \leq x < 4 \\ 2x+8 \neq 4x-16 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 \leq x < 4 \\ x \neq 12 \end{Bmatrix} \Rightarrow x \in [0,4) \right)$$

ή

$$\left(\begin{Bmatrix} x > 4 \\ f(x) \in A_f \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x > 4 \\ \dfrac{2(x+4)}{x-4} \neq 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x > 4 \\ 2x+8 \neq 4x-16 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x > 4 \\ x \neq 12 \end{Bmatrix} \Rightarrow x \in (4,12) \cup (12,+\infty) \right)$$

Για $x \in [0,4)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2(x+4)}{x-4}+4\right)}{\frac{2(x+4)}{x-4}-4} = \frac{\frac{4x+16+8x-32}{x-4}}{\frac{2x+8-4x+16}{x-4}} = \frac{12x-16}{-2x+24} = \frac{6x-8}{-x+12}$$

Για $x \in (4,12) \cup (12,+\infty)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2(x+4)}{x-4}+4\right)}{\frac{2(x+4)}{x-4}-4} = \frac{\frac{4x+16+8x-32}{x-4}}{\frac{2x+8-4x+16}{x-4}} = \frac{12x-16}{-2x+24} = \frac{6x-8}{-x+12}$$

Άρα Για $x \in [0,4)$:

$$(f \circ g)(x) = \frac{6x-8}{-x+12} \text{ για } x \in [0,4) \cup (4,12) \cup (12,+\infty).$$

Γ3.

i)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-4)}{2x} \cdot \frac{\eta\mu(x \cdot f(x))}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-4)}{2x(x+4)} \cdot \eta\mu\left(\frac{2x(x+4)}{(x-4)}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\left(\frac{2x(x+4)}{(x-4)}\right)}{\frac{2x(x+4)}{(x-4)}} \underset{x\to+\infty \Rightarrow u\to+\infty}{\overset{u=\frac{2x(x+4)}{(x-4)}}{=}}$$

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0.$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{2x(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+8x}{x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty.\right.$$

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = +\infty\Big)$

ii)

$$\lim_{x\to-4^+}(x-4)\cdot\ln f(x)\cdot\frac{\eta\mu f(x)}{2(x+4)} = \lim_{x\to-4^+}\ln f(x)\cdot\frac{\eta\mu f(x)}{\frac{2(x+4)}{x-4}} = \lim_{x\to-4^+}\ln f(x)\cdot\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \underset{x\to-4^+\Rightarrow h\to0^+}{\overset{h=f(x)}{=}}$$

$$\lim_{h\to0^+}\ln h\cdot\frac{\eta\mu h}{h} = -\infty\cdot1 = -\infty.$$

Γ4. Θεωρούμε $h(x) = f(x) - e^{x+4} + 1,\ x<4$.

$h(-4) = f(-4) - 1 + 1 = 0$, οπότε το -4 είναι ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

Έστω $x_1, x_2 \in (4,+\infty)$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1+4 < x_2+4 \Leftrightarrow e^{x_1+4} < e^{x_2+4} \Leftrightarrow -e^{x_1+4} > -e^{x_2+4} \Leftrightarrow -e^{x_1+4}+1 > -e^{x_2+4}+1 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1-4 < x_2-4 \overset{x_1-4,\,x_2-4<0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_1-4} > \frac{1}{x_2-4} \Leftrightarrow \frac{16}{x_1-4} > \frac{16}{x_2-4} \Leftrightarrow$$

$$2+\frac{16}{x_1-4} > 2+\frac{16}{x_2-4} \Leftrightarrow \frac{2x_1-8+16}{x_1-4} > \frac{2x_2-8+16}{x_2-4} \Leftrightarrow \frac{2x_1+8}{x_2-4} > \frac{2x_2+8}{x_2-4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\left(x_1+8\right)}{x_1-4} > \frac{2\left(x_2+8\right)}{x_1-4} \Leftrightarrow f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right) \qquad (2)$$

$(1)+(2) \Rightarrow h\left(x_1\right) > h\left(x_2\right)$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα και 1–1 άρα το –8 μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $(\lambda-1)x^2-2x+3\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το οποίο ισχύει όταν

$$\Delta<0 \Leftrightarrow (-2)^2-4\cdot(\lambda-1)\cdot 3<0 \Leftrightarrow 4-12\lambda+12<0 \Leftrightarrow 12\lambda>16 \Leftrightarrow \lambda>\frac{4}{3}.$$

Δ2. **α)** Αν $\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\mu-2)x^3+3x^2+4}{-2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mu-2}{-2}\cdot\frac{x^3}{x} = \frac{2-\mu}{2}\lim_{x\to+\infty} x^2 \overset{\mu>2}{=} -\infty$$ απορρίπτεται.

Αν $\lambda\neq 1$: $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\mu-2)x^3+3x^2+4}{(\lambda-1)x^2-2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mu-2}{\lambda-1}\cdot\frac{x^3}{x^2} = \frac{\mu-2}{\lambda-1}\cdot\lim_{x\to+\infty} x = \frac{\mu-2}{\lambda-1}(+\infty).$$

Για να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ πρέπει $\frac{\mu-2}{\lambda-1}<0 \Leftrightarrow \lambda<1$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ για $\lambda\in(1,+\infty)$.

β) Για $\lambda=1$ γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Για $\lambda\neq 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\mu-2}{\lambda-1}\cdot(+\infty)$.

Για να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ πρέπει $\dfrac{\mu-2}{\lambda-1} < 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ για $\lambda \in (-\infty, 1)$.

Δ3. Για $\lambda = 1$: $f(x) = \dfrac{(\mu-2)x^3 + 3x^2 + 4}{-2x+3} \Leftrightarrow (\mu-2)x^3 + 3x^2 + 4 = (-2x+3)\cdot f(x)$ οπότε

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\left[(\mu-2)x^3 + 3x^2 + 4\right] = \lim_{x\to\frac{3}{2}}(-2x+3)\cdot f(x) \Leftrightarrow (\mu-2)\frac{27}{8} + \frac{27}{4} + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$27(\mu-2) + 54 + 32 = 0 \Leftrightarrow 27\mu - 54 + 54 + 32 = 0 \Leftrightarrow \mu = -\dfrac{32}{27}$ οπότε

$$f(x) = \frac{\left(-\frac{32}{27} - 2\right)x^3 + 3x^2 + 4}{-2x+3} = \frac{-\frac{86}{27}x^3 + 3x^2 + 4}{-2x+3} = \frac{-86x^3 + 81x^2 + 108}{27(-2x+3)}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{-86x^3 + 81x^2 + 108}{27(-2x+3)} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{(2x-3)(-86x^2 - 48x - 72)}{27(-2x+3)} =$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{(2x-3)(-86x^2 - 48x - 72)}{27(-2x+3)} = \frac{-\frac{387}{2} - 72 - 72}{-27} = \frac{387 + 288}{27} = 25 = \alpha.$$

Δ4. Αν $\lambda = 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\mu-2)x^3 + 3x^2 + 4}{(\lambda-1)x^3 - 2x^2 + 3x} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mu-2}{\lambda-1}\cdot\dfrac{x^3}{x^3} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\mu-2}{\lambda-1} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 4\mu - 8 = 3\lambda - 3 \Leftrightarrow 3\lambda - 4\mu + 5 = 0$ οπότε το σημείο Α ανήκει στην ευθεία (ε).