ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Σάββατο 9 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 7

Α2. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

Μονάδες 8

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας **«Σωστό»** ή **«Λάθος»** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|$.

β. Για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta=-\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}$.

γ. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}=0$ ή $\vec{\beta}=0$.

δ. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 2 ισχύει $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2$.

ε. Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2 ισχύει $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}=4$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\kappa-2,-2\kappa\right)$, $\vec{\beta}=\left(-\kappa-3,\kappa-2\right)$, $\kappa>0$.

Β1. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Μονάδες 9

Β2. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ ώστε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$.

Μονάδες 8

Αν $\vec{\gamma}=\vec{\beta}+(6,2)$

Β3. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ να είναι παράλληλα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A\Gamma}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|=2$ και σημεία Δ και Ε ώστε:

$$\overrightarrow{B\Delta}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ και } \overrightarrow{BE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{B\Gamma}.\ \text{Αν } \overrightarrow{AB}=\vec{\alpha},\ \overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$$

Γ1. Να δείξετε ότι: $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\vec{\alpha}+\frac{4}{5}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=-\frac{3}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Μονάδες 10

Γ2. Να βρείτε το γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda+1,2)$ και $\vec{\beta}=(1,\lambda+2)$.

Δ1. Να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta}$.

Μονάδες 7

Δ2. Για λ= –3 να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

Δ3. Για λ= –2 να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ ώστε: $\vec{v} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{v}| = 5$.

Μονάδες 10

Ωρίωνας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ	ΑΠΟ 28/12/2020 ΕΩΣ 09/01/2021
	2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 9 Ιανουαρίου 2021

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Λ-Λ-Λ-Σ-Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow (\kappa-2)(-\kappa-3)-2\kappa(\kappa-2)=0$

$\Leftrightarrow (\kappa-2)(-3\kappa-3)=0$

$\kappa=2$ ή $\kappa=-1$

Β2. Ισχύει ότι:

$(\kappa-2)^2+4\kappa^2=3 \Rightarrow \kappa^2-4\kappa+4+4\kappa^2-3=0$

$\Rightarrow 5\kappa^2-4\kappa+1=0$

$\Delta=-4<0$ αδύνατη

Άρα δεν υπάρχει καμία τιμή του κ

Β3. Είναι $\vec{\gamma}=(-\kappa+3,\kappa)$

Έτσι $\lambda_{\vec{\alpha}}=\dfrac{-2\kappa}{\kappa-2}$ $\quad\lambda_{\vec{\gamma}}=\dfrac{\kappa}{-\kappa+3}$

Άρα $\dfrac{-2\kappa}{\kappa-2}=\dfrac{\kappa}{-\kappa+3}\Rightarrow 2\kappa^2-6\kappa=\kappa^2-2\kappa\Rightarrow$

$\kappa^2-4\kappa=0\Rightarrow\kappa=0$ ή $\kappa=4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=$$

$$\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{A\Gamma}=$$

$$\frac{1}{5}\vec{\alpha}+\frac{4}{5}\vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma}=-\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=-\frac{3}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$$

Γ2. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο άρα $\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A\Gamma}\right)=60^\circ$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A\Gamma}\right)=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2 \qquad \textbf{(1)}$$

Γ3. Πρέπει $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}=0$

Είναι $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\left(\frac{1}{5}\vec{\alpha}+\frac{4}{5}\vec{\beta}\right)\left(-\frac{3}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=-\frac{3}{10}\vec{\alpha}^2+\frac{1}{5}\vec{\alpha}\vec{\beta}-\frac{6}{5}\vec{\alpha}\vec{\beta}+\frac{4}{5}\vec{\beta}^2\overset{(1)}{=}$

$$-\frac{3}{10}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{5}\cdot2-\frac{6}{5}\cdot2+\frac{4}{5}\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=-\frac{3}{10}\cdot4+\frac{1}{5}\cdot2-\frac{6}{5}\cdot2+\frac{4}{5}\cdot4=$$

$$-\frac{12+4-24+32}{10}=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{2}{\lambda+1}$, $\quad \lambda_{\vec{\beta}} = \frac{\lambda+2}{1}$. Έτσι: $\frac{2}{\lambda+1} = \frac{\lambda+2}{1} \Rightarrow$

$\lambda^2 + 2\lambda + \lambda + 2 = 2 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = -3$

Δ2. Για $\lambda = -3$ $\quad \vec{\beta} = (1, -1)$ $\quad \lambda_{\vec{\beta}} = -1$ άρα εφω= -1, δηλ. ω=360^o-45^o=325^o, αφού το διάνυσμα θέσης ανήκει στο 4^o τεταρτημόριο.

Δ3. Έστω $\vec{\nu} = (x, y)$ $\quad \vec{\alpha} = (-1, 2)$. Τότε $\vec{\nu}\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow -x + 2y = 0 \Rightarrow \underline{x = 2y}$

$|\vec{\nu}| = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow (2y)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 5y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 5$

- $y = \sqrt{5} \Rightarrow x = 2\sqrt{5}$ και $\vec{\nu} = \left(2\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$
- $y = -\sqrt{5} \Rightarrow x = -2\sqrt{5}$ και $\vec{\nu} = \left(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$