ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Σάββατο 15/05/2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε με Σ (Σωστή) ή με Λ (Λανθασμένη) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Η ακτίνα του κύκλου C: $x^2 + y^2 + Ax + Bx + \Gamma = 0$ με $A^2 = B^2 - 4\Gamma > 0$ είναι ίση με $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{4}$.

β. Έστω σημείο $M(x_0, y_0)$ και ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ με ένα τουλάχιστον από τα Α και Β διάφορο του μηδενός τότε $d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ay_0 + Bx_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$$

δ. Η εξίσωση της παραβολής που έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των x είναι:

$$y^2 = 2px$$

ε. Το εσωτερικό γινόμενο δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$$

(10 μονάδες)

Α2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = p^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = p^2$ (όπου $p > 0$ η ακτίνα του κύκλου). **Σ** **Λ**

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (0, 2)$, $\vec{\beta} = (1, 1)$.

Β1. Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ *(5 μονάδες)*

Β2. Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, *(8 μονάδες)*

Β3. Να δειχθεί ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι 45^o. *(8 μονάδες)*

Β4. Αν $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$ αν ισχύει $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$. *(4 μονάδες)*

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Β(–2, 3), ύψος ΑΔ: $y = x + 1$ και διάμεσο ΑΜ: $y = –3x + 5$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι Α(1, 2). *(5 μονάδες)*

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ. *(7 μονάδες)*

Γ3. Να αποδείξετε ότι Γ(6, –5). *(8 μονάδες)*

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. *(5 μονάδες)*

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 6kx - 8ky = 0, \quad k \in \mathbb{R}^*$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (για οποιαδήποτε τιμή του $k \in \mathbb{R}^*$) του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. *(5 μονάδες)*

Δ2. Να βρεθεί η γραμμή στην οποία βρίσκονται τα κέντρα των προηγούμενων κύκλων.

(5 μονάδες)

Δ3. Δείξτε ότι οι κύκλοι C διέρχονται από το σημείο Ο(0, 0) για κάθε $k \in \mathbb{R}^*$.

(5 μονάδες)

Δ4. Έστω C1 ο κύκλος για $k = 1$ και ευθεία (ε) με εξίσωση (ε): $y=\lambda x + 2$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία (ε) να τέμνει τον κύκλο C1 σε δύο σημεία Α και Β έτσι ώστε $A\hat{O}B = 90^\circ$.

(6 μονάδες)

Δ5. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία διέρχεται από το κέντρο του προηγούμενου κύκλου για $k = 1$ και έχει διευθετούσα την ευθεία $x = -\frac{p}{2}$. Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής. *(4 μονάδες)*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Λ Λ Σ Σ Σ

Α2. Θεωρία σελίδα 83 σχολικού βιβλίου

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$

Β2. $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2^2}=2$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$

Β3. $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, άρα η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι 45^{o}.

Β4. Έστω $\vec{\gamma}=(x,y)$. Έχουμε $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=0$, επίσης $\vec{\gamma}=k\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, άρα $\left(k\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow k|\vec{\alpha}|^2+\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow 4k+2=0\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Α λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y=x+1 \\ y=-3x+5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

Γ2. $A\Delta\perp B\Gamma\Leftrightarrow\lambda_{B\Gamma}=-1$. Άρα $\varepsilon_{B\Gamma}: y-3=-1(x+2)\Leftrightarrow y=-x+1$.

Γ3. Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Γ πρώτα βρίσκουμε τις συντεταγμένες του Μ λύνοντας το σύστημα: $\begin{cases} y=-3x+5 \\ y=-x+1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$.

Αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ έχουμε: $\begin{cases} 2 = \dfrac{-2+x_\Gamma}{2} \\ -1 = \dfrac{3+y_\Gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Gamma = 6 \\ y_\Gamma = -5 \end{cases}$

Γ4. $\overrightarrow{AB} = (-3,1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (5,-7)$ οπότε $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = 16$,

έτσι $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| = 8$ τετραγωνικές μονάδες.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $A = -6k$, $B = -8k$, $\Gamma = 0$, οπότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 100\ k^2 > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{R}^*$. Άρα η C παριστάνει εξίσωση κύκλου για κάθε $k \in \mathbb{R}^*$ με κέντρο Κ(3k, 4k) και ακτίνα ρ=5|k|.

Δ2. Θα βρούμε το γεωμετρικό τόπο που ανήκουν τα κέντρα των κύκλων.

Για $\begin{cases} x = 3k \\ y = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{x}{3} \\ y = \dfrac{4}{3}x \end{cases}$.

Δηλαδή τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία $y = \dfrac{4}{3}x$.

Δ3. Θέτοντας όπου x=0, y=0 στην C έχουμε 0=0 δηλαδή το Ο(0,0) ανήκει στον κύκλο C για κάθε $k \in \mathbb{R}^*$.

Δ4. Για k = 1 προκύπτει ο κύκλος C1: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

Εφόσον Α και Β είναι σημεία της ευθείας y = λx + 2 και Ο σημείο του κύκλου με $A\hat{O}B = 90^\circ$ Σημαίνει ότι η $A\hat{O}B$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα τα Α, Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου C1. Έτσι καταλαβαίνουμε ότι η ευθεία (ε) περνάει από το κέντρο του κύκλου όπου: Κ(3, 4) για k = 1.

Οι συντεταγμένες του Κ επαληθεύουν την (ε), συνεπώς: 4 = 3λ + 2, δηλαδή $\lambda = \dfrac{2}{3}$.

Δ5. Η εξίσωση της ζητούμενης παραβολής είναι $y^2 = 2px$.

Οι συντεταγμένες του κέντρου επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε $p=\frac{8}{3}$.

Άρα $y^2=\frac{16}{3}x$ με διευθετούσα $x=-\frac{4}{3}$ και εστία $E\left(\frac{4}{3},0\right)$.