3η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 5 Μαρτίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $\Delta(x)$ με το $\delta(x)$. Πότε η διαίρεση αυτή ονομάζεται τέλεια;

Μονάδες 10

Α2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.*

α. Το πολυώνυμο $P(x)=4x^3-3x+6$ έχει 8 πιθανές ακέραιες ρίζες.

β. Η συνάρτηση $f(x)=-4\eta\mu 2x$ έχει περίοδο $T=\pi$.

γ. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό μ και το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό ν το πηλίκο $P(x):Q(x)$ έχει βαθμό μ-ν.

δ. Το σύστημα $\begin{cases}\lambda x+y=2-\lambda\\ x+\lambda y=\lambda\end{cases}$ για λ=1 είναι αδύνατο.

ε. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την μέγιστη τιμή, την ελάχιστη τιμή και την περίοδο της $f(x)$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $f(x)$ με τον άξονα x'x.

Μονάδες 5

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) = 2$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την ανίσωση $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \leq 0$

Μονάδες 15

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2} = 1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\alpha - 1)x^3 + x^2 + \beta x - 2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Δ1. Να βρεθούν οι τιμές των α, β.

Μονάδες 5

Για α = -2 και β = 3:

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 5

Δ3. Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $P(x):(x-3)$.

Μονάδες 5

Δ4. Για ποια $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται πάνω απ' τον x'x;

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x), με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x), τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x),$$

όπου το υ(x) ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

Η διαίρεση ονομάζεται τέλεια όταν το υπόλοιπο της είναι μηδέν.

Α2.

α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για την συνάρτηση $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$ ισχύει:

Μέγιστη τιμή : $\max_{f(x)} = 2$

Ελάχιστη τιμή : $\min_{f(x)} = -2$

Περίοδος : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Β2. Για να βρούμε τα σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα x'x μηδενίζουμε το y και υπολογίζουμε το αντίστοιχο x.

$f(x)=0$

$-2\text{συν}\dfrac{x}{2}=0$

$\text{συν}\dfrac{x}{2}=0$

$\text{συν}\dfrac{x}{2}=\text{συν}\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{x}{2}=2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$

$x=4\kappa\pi\pm\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $f(x)$ με τον άξονα x’x είναι της μορφής: $A(4\kappa\pi+\pi,0)$ και $B(4\kappa\pi-\pi,0)$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$.

B3.

$f^2(x)=2$

$\left(-2\text{συν}\dfrac{x}{2}\right)^2=2$

$4\text{συν}^2\dfrac{x}{2}=2$

$\text{συν}^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\text{συν}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{συν}\dfrac{x}{2}=\text{συν}\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{x}{2}=2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}$

$x=4\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την ανίσωση $3x^3+2x^2-7x+2\le 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι $\pm1,\pm2$.

Υπολογίζουμε την τιμή του πολυωνύμου μέχρι να βρούμε την 1η ακέραια ρίζα.

$$P(1)=3\cdot1^3+2\cdot1^2-7\cdot1+2=3+2-7+2=7-7=0$$

Κάνουμε horner με το 1:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -7 & 2 & 1 \\ \downarrow & 3 & 5 & -2 & \\ 3 & 5 & -2 & 0 & \end{array}$$

Άρα προκύπτει ότι $3x^3+2x^2-7x+2=(x-1)(3x^2+5x-2)$.

$$(x-1)(3x^2+5x-2)\le 0$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=25-4\cdot3\cdot(-2)=25+24=49$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-5\pm7}{6}=\begin{cases} x_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \\ x_1=\frac{-12}{6}=-2 \end{cases}$$

Από τον πίνακα προσήμων έχουμε:

x	-∞	-2	1/3	1 +∞
x - 1	-	-	-	+
$3x^2+5x-2$	+	-	+	+
Γινόμενο	-	+	-	+

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $x\in(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{3},1\right]$.

Γ2. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}=1$

Θα πρέπει:

$x+5\ge 0$ και $x+2\ge 0$

$x\ge -5$ $\quad$ $x\ge -2$

Επομένως τελικά $x\in[-2,+\infty)$.

$\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}=1$

$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)^2=1^2$

$\sqrt{x+5}^2-2\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}^2=1$

$x+5-2\sqrt{(x+5)(x+2)}+x+2=1$

$2x+7-2\sqrt{x^2+7x+10}=1$

$-2\sqrt{x^2+7x+10}=-2x-6$

$\sqrt{x^2+7x+10}=x+3$

$\sqrt{x^2+7x+10}^2=(x+3)^2$

$x^2+7x+10=x^2+6x+9$

$x=-1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $P(x)=x^4+(\alpha-1)x^3+x^2+\beta x-2$

Αφού γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, η διαίρεση τους αφήνει υπόλοιπο μηδέν.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & \alpha-1 & 1 & \beta & -2 & 1 \\ \downarrow & 1 & \alpha & \alpha+1 & \alpha+\beta+1 & \\ 1 & \alpha & \alpha+1 & \alpha+\beta+1 & \alpha+\beta-1 & \end{array}$$

$\upsilon=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta-1=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1(1)$

και $\pi(x)=x^3+\alpha x^2+(\alpha+1)x+\alpha+\beta+1$

Η διαίρεση του $\pi(x)$ με το $x-1$ αφήνει επίσης υπόλοιπο μηδέν, άρα από το horner έχουμε:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & \alpha+1 & \alpha+\beta+1 & 1 \\ \downarrow & 1 & \alpha+1 & 2\alpha+2 & \\ 1 & \alpha+1 & 2\alpha+2 & 3\alpha+\beta+3 & \end{array}$$

$\upsilon'=0 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta+3=0 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-3(2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{array}{l} 3\alpha+\beta=-3 \\ \underline{-\alpha-\beta=-1\,(+)} \\ 2\alpha=-4 \\ \alpha=-2 \end{array}$$

και $\alpha+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=1-\alpha \Leftrightarrow \beta=1+2 \Leftrightarrow \beta=3$.

Δ2. Για α = -2 και β = 3:

$$P(x)=x^4-3x^3+x^2+3x-2$$

Από το πρώτο horner που κάναμε, έχουμε:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow x^4-3x^3+x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3-2x-x+2)=0$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

ή

$$x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x-2)=0$$

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

ή

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Δ3. Θα κάνουμε horner το $P(x)$ με το x – 3:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ \downarrow & 3 & 0 & 3 & 18 & \\ 1 & 0 & 1 & 6 & 16 & \end{array}$$

Άρα η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι

$$x^4-3x^3+x^2+3x-2=(x^3+x+6)(x-3)+16 .$$

Δ4. Για να βρίσκεται η γραφική παράσταση της $P(x)$ πάνω απ' τον x'x θα πρέπει να ισχύει:

$$P(x)>0 \Leftrightarrow x^4-3x^3+x^2+3x-2>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-1)(x-2)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x+1)(x-2)>0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)(x-2)>0$$

Από τον πίνακα προσήμων έχουμε:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+	+	
$x+1$	-	-	+	+	
$x-2$	-	-	-	+	
Γινόμενο	+	+	-	+	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (2,+\infty)$.